LAURENT SCHWARTZ

UND DIE ENTWICKLUNG DER THEORIE DER DISTRIBUTIONEN

Fabian Schwarz

18.07.04

Inhaltsverzeichnis

A) Das Ringen eines Mathematikers mit dem 20. Jahrhundert

Laurent Schwartz, einer der bedeutendsten französischen Mathematiker des 20. Jahrhunderts, verstarb am 4. Juli 2002 in Paris im Alter von 87 Jahren. Nur wenige Jahre vor seinem Tod verfasste er eine ausführliche Autobiographie unter dem Titel „Un mathématicien aux prises avec le siècle“ [1], welcher unmittelbar auf sein vielseitiges politisches Wirken hinweist. Das Buch enthält nicht nur eine sehr persönliche Beschreibung des Lebenswegs von Schwartz, sondern ermöglicht auch einen direkten Zugang zu seiner Geisteshaltung in politischer wie auch in wissenschaftlicher Hinsicht. Leben und Werk dieser herausragenden Persönlichkeit sollen im Folgenden thematisiert werden.

B) Laurent Schwartz und die Entwicklung der Theorie der Distributionen

Zunächst werde ich den Lebensweg von Laurent Schwartz nachzeichnen und insbesondere auf sein herausragendes politisches Engagement eingehen. Von seinem mathematischen Werk werde ich im Anschluss nur seine Theorie der Distributionen vorstellen, die ihm zu internationaler Bekanntheit verhalf und einen Meilenstein in der Entwicklung der modernen Mathematik darstellt. Hierzu werde ich auch die historische Entwicklung und die Vorläufer dieser Theorie untersuchen.

I. Biographie

Am 5. März 1915 kam Laurent Schwartz als Sohn von Anselme und Claire Schwartz, geborene Debré, auf die Welt. Aus ärmlichen Verhältnissen stammend verließ Anselme Schwartz ihm Jugendalter seinen Geburtsort im Elsass, da ihm dort die politische Situation nach dem Anschluss an Deutschland widerstrebte. Ohne ein Wort französisch zu sprechen zog er nach Paris. Dort kam er in einem israelitischen Seminar unter, wo er seinen jüdischen Glauben verlor. Infolgedessen wuchsen auch später seine drei Söhne Laurent, Bertrand und Daniel mit einer atheistischen Erziehung auf, obwohl die Familie seiner Ehefrau stark im Judentum verwurzelt war. Nachdem er sein Abitur nachgeholt hatte, studierte er Medizin und wurde einer der glänzendsten Chirurgen seiner Zeit.

Laurent Schwartz war ein ausgezeichneter Schüler. Seine Stärken lagen zunächst weniger in der Mathematik als in den alten Sprachen. So begann er in seiner Freizeit eine Grammatik des Griechischen zu verfassen und gewann den Concours Général in Latein, einem nationalen Wettbewerb für Oberschüler. Dennoch zweifelte er seine Intelligenz an, da er um einen Sachverhalt zu begreifen oftmals eine viel länger Zeit benötigte als seine Mitschüler, denn er war stets bemüht die Lehrinhalte in all ihren Feinheiten von Grund auf zu verstehen. Die offensichtliche Unstimmigkeit zwischen seinen guten Noten und seiner langsamen Denkweise bereitete ihm lange Zeit Kopfzerbrechen, bis er schließlich einsah, dass Intelligenz nicht unbedingt eine schnelle Auffassungsgabe voraussetzt. Im Gegenzug war er dafür mit einem exzellenten Gedächtnis gesegnet. In seiner Autobiographie behauptet er, bis zu seinem rund 55. Lebensjahr jede ihm bekannte mathematische Aussage samt Beweisführung im Kopf gehabt zu haben. Erst im Jahr 1972 begann er auf Anraten seines ehemaligen Schülers Alexander Grothendieck seine Kenntnisse systematisch aufzuzeichnen und so entstand sein mehrtausendseitiges schriftliches Gedächtnis, auf das er sich mit höherem Alter zunehmend stützte.

In der Oberstufe begann seine Leidenschaft für die Mathematik, als er die Schönheit der Geometrie entdeckte. Zwar beeindruckten ihn auch die übrigen Naturwissenschaften, insbesondere die Physik, jedoch regen diese ihn nicht gleichermaßen zum Selbststudium an. Aufgrund seiner doppelten Begabung sowohl ihn den alten Sprachen als auch in der Mathematik, legte er in beiden Fächern seine Abiturprüfung ab, um sich alle Möglichkeiten offen zu halten. Als es schließlich um die Wahl seines Studienfaches ging, suchten seine Eltern Rat bei den zahlreichen Wissenschaftlern im weiteren Familienkreis. Die Fürsprachen für ein Mathematikstudium waren eher zurückhaltend. Wenig hilfreich war auch die Haltung von Laurents Großonkel mütterlicherseits, dem prominenten Mathematiker Jacques Hadamard, welcher sich beschwerte, dass der Gymnasiast noch nicht mit der Riemann'schen Zeta-Funktion vertraut war. Schließlich entscheidete sich Schwartz dennoch für die Mathematik und belegte einen intensiven zweijährigen Vorbereitungskurs fürs Studium.

Er bestand das äußerst harte Auswahlverfahren der Elite-Hochschule Ecole Normale Superieure (ENS), obwohl er mangels räumlichen Vorstellungsvermögens schlecht bei einer Aufgabe aus der analytischen Geometrie in drei Dimensionen abschnitt. In seiner Autobiographie bemerkt er dazu scherzhaft, dass seine rechte Hirnhälfte unterentwickelt sei, was ihm zudem einen miserablen Orientierungssinn beschere. Dank seiner außerordentlichen Abstraktionsfähigkeit fühlte er sich dagegen mit höher- oder gar unendlich-dimensionalen Räumen wesentlich vertrauter als mit den eigentlich anschaulicheren Spezialfällen.

1934 begann Schwartz sein Studium und besuchte Vorlesungen bei Fréchet, Borel und Lebesgue. Auch seine spätere Ehefrau Marie-Hélène Lévy, Tochter des bedeutenden Stochastikers Paul Lévy, studierte mit ihm an der ENS Mathematik. Sie war ihrem äußerst schüchternen Liebhaber schon während der Schulzeit aufgefallen, als sie beide dasselbe Lycée besuchten, jedoch lernten sie sich erst näher kennen, nachdem die Mütter als Vermittler tätig geworden waren und die Verlobung besprochen hatten. Da Marie-Hélène lebensbedrohlich an Tuberkulose erkrankte und ein Jahr in einem Sanatorium in Süd-Frankreich verbrachte, musste die Hochzeit bis zu ihrer Genesung verschoben werden. Um den weiteren Familienkreis nicht zu enttäuschen, feierte das Paar 1938 eine traditionelle jüdische Zeremonie, obwohl sich beide vom Glauben losgesagt hatten.

Während seines Studiums erwachte auch Schwartz' politisches Interesse. Er verfolgte aufmerksam das Tagesgeschehen in der Presse, las aber auch zahlreiche politische Bücher und Zeitschriften, wodurch er die beschränkte Sichtweise, die ihm sein bürgerlich-konservatives Elternhaus vermittelt hatte, überwältigte. Stets stand er in regem Briefkontakt mit seiner kranken Frau, mit der er seine politischen Überzeugungen teilte. Als Gegner des Kolonialismus zeigte sich Schwartz besonders von den Ideen des Trotskismus angezogen, so dass er sich 1936 einer trotskistischen Partei anschloss. Nach 11 Jahren militanter Mitgliedschaft trat er 1947 aus dieser Organisation aus, da die trotskistische Bewegung kaum Anklang in der Bevölkerung gefunden hatte und ihre Ideale ihm angesichts der Probleme in der Nachkriegszeit auf geradezu aberwitzige Weise weltfremd erschienen. Dennoch blieb Schwartz zeitlebens Internationalist und auch ohne Parteizugehörigkeit politisch aktiv.

1937 schloss Schwartz sein Studium mit der Agrégation de Mathématique ab, welche zum Lehramt an einem Lycée berechtigt. Bevor er an die Fortsetzung seiner akademische Laufbahn denken konnte, begann noch im gleichen Jahr sein zweijähriger Militärdienst. Diesen schloss er noch vor dem Beginn des zweiten Weltkriegs ab doch wurde er bald als Reservist in den Krieg einberufen. Nach einer Verletzung wurde er aus dem Kampfgeschehen abgezogen und in eine Ausbildungslager an der Atlantikküste versetzt, wo er Offiziere in Luftabwehr zu unterrichten hatte. Nach dem Einmarsch der deutschen Truppen in Frankreich im Jahr 1940 wurde er aus der Armee entlassen und begab sich nach Toulouse in die unbesetzte Zone, wo sich auch seine Eltern aufhielten. Dort wollte er wieder seine mathematischen Arbeiten aufnehmen, musste allerdings feststellen, dass die örtliche Universität denkbar schlechte Voraussetzungen dafür bot. Er traf auf Henri Cartan, der dem jungen Ehepaar empfahl nach

Clermont-Ferrand zu ziehen, da dorthin die renommierte naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Straßburg samt den damaligen Größen der französischen Mathematik geflohen war. In Clermont-Ferrand schloss sich Schwartz der Mathematikervereinigung Bourbaki an, welche 1935 von Weil, Cartan, Ehresmann, Dieudonné, Delsarte und de Possel gegründet worden war. Ziel dieser Gruppierung war eine Gesamtausgabe des mathematischen Wissens auf axiomatischer Basis zu verfassen. Schwartz wurde zu einem begeisterten und sehr regem Anhänger der Bewegung, was sich auch im Stil seiner eigenen Arbeiten niederschlug. Dennoch räumte er rückblickend in späteren Jahren auch einige Fehlleistungen Bourbakis ein. So kreidete er beispielsweise die unzureichende Behandlung der Stochastik an und bedauerte, dass die stets sehr abstrakten Arbeiten nicht unter Berücksichtigung pädagogischer Aspekte entstanden waren.

Gedrängt von der ungewissen Situation unter der Kollaborationsregierung Pétains arbeitete er nur zwei Jahre an seiner Promotion, die er 1942 abschloss. Obwohl es für ihn als Juden und Trotskisten immer schwieriger wurde sich frei zu bewegen, hielt er an seinen politischen Aktivitäten fest und verteilte trotskistische Flugblätter, die die deutschen Soldaten zu einer Verbrüderung im Kampf gegen Hitler aufriefen. Trotz der widrigen Umstände entschloss sich das junge Ehepaar ein Kind zu haben. Nach der Geburt musste Marie-Hélène Schwartz das Krankenhaus fluchtartig und ohne ihren neugeborenen Sohn Marc André verlassen, weil sie und ihr Mann von der vychistischen Polizei verfolgt wurden. Das Kind wurde zunächst von den Großeltern versorgt, bis die Eltern Zuflucht in einem kleinen Berdorf im italienisch besetzten Teil Frankreichs bei Grenoble gefunden hatten. Um Denunziationen zu vermeiden fertigten sie sich gefälschte Ausweise auf den unverfänglicheren Namen Sélimartin an. Trotz Schwartz' ständiger Umsicht, die seine Aufmerksamkeit so sehr beanspruchte, dass er sich nicht mehr mit der Mathematik beschäftigen konnte, entkam er bei Razzien mehrmals nur um Haaresbreite.

Nach der Befreiung Frankreichs durch die Truppen der Alliierten zog Schwartz nach Paris um. Dort entwickelt er innerhalb einer Nacht des Jahres 1944 die Grundzüge der Theorie der Distribution. Für kurze Zeit war er dann an der Universität von Grenoble tätig, bis er 1945 eine Anstellung in Nancy bekam. Zur damaligen Zeit zählte die dortige mathematische Fakultät zu den besten weltweit, nicht nur wegen ihrer renommierten Professoren sondern auch, weil Mathematiker wie Cartan landesweit die begabtesten Studenten aufspürten und nach Nancy schickten. Zu den Schülern von Schwartz zählten in dieser Zeit unter anderem Malgrange, Lions und Grothendieck, die später erhebliche Bedeutung in der modernen französischen Mathematik erlangten. Neben seiner Forschungstätigkeit verwendete Schwartz einen Großteil seiner Zeit in Nancy für die Konzeption und Niederschrift seiner zweibändigen Monographie „Théorie des Distributions“, in der er eine möglichst komplette Darstellung des Sachgebiets anstrebt. Dank der durchdachten Darstellung ist diese Schrift bis heute im Wesentlichen aktuell geblieben.

Ab 1947 stellte Schwartz bei zahlreichen Auslandsaufenthalten seine Distributionen-Theorie vor und gelangte so zu weltweiter Anerkennung. Auf dem internationalen Mathematiker Kongress von 1950 in den USA wurde ihm die Fields Medaille verliehen. Im Vorfeld der Tagung verweigerten ihm die amerikanischen Behörden aufgrund seiner trotskistischen Gesinnung zunächst die Einreise, schließlich wurde ihm dann doch ein Visum ausgestellt, nachdem die Organisatoren den amerikanischen Präsidenten Truman persönlich zum Eingreifen bewegt hatten.

1952 verließ Schwartz Nancy. In den folgenden Jahren hatte er Professorenstellen an der Sorbonne, der Ecole Polytechnique und der Université Paris VII inne. Wegen seines pädagogischen Geschicks waren seine Veranstaltungen stets sehr beliebt. Hervorzuheben ist auch, dass er nicht nur reine Mathematik unterrichtete, sondern zum Beispiel über lange Jahre hinweg einen Kurs über die mathematischen Methoden der Physik anbot, der viel Zuspruch erfuhr. 1983 wurde er in den Ruhestand versetzt, wenngleich auch seine letzte mathematische Arbeit erst im Jahr 1994 erschien.

Am 4. Juli 2002 starb Laurent Schwartz in Paris. Er hinterließ seine Ehefrau Marie-Hélène und seine Tochter Claudine, welche als Professorin der Mathematik in Grenoble tätig ist.

II. Politisches Engagement

Zu großer Bekanntheit gelangte Laurent Schwartz auch außerhalb wissenschaftlicher Kreise durch seine politischen Unternehmungen, von denen einige im Folgenden beleuchtet werden sollen.

1. Kampf um die Menschenrechte

Als überzeugter Gegner des Kolonialismus setzte sich Schwartz ab den 50er Jahren für die Freiheitsrechte unterdrückter Volksgruppen in der ganzen Welt ein. Ein Beweggrund für sein aufopferndes Engagement ist wohl in seiner eigenen Verfolgung während des zweiten Weltkriegs zu finden.

a) Algerien

Mit dem Aufmarsch französischer Truppen in der Kolonie Algerien im November 1954, verschlechterten sich die Lebensbedingungen und die rechtliche Situation der dortigen Bevölkerung drastisch. Folter und Festnahmen ohne richterlichen Beschluss standen auf der Tagesordnung. Eines der Opfer des Kolonialregimes war Maurice Audin, Student bei de Possel an der Universität Algier. Er wurde bei Schwartz in Paris vorstellig, da er beabsichtigte dort zu promovieren. Allerdings konnte der kommunistisch gesinnte Audin diese Pläne nie verwirklichen, denn er wurde von Fallschirmjägern der französischen Armee verschleppt und stirbt nach Folterung in Haft. Als Schwartz von dem Schicksal des jungen Mathematikers erfuhr, rufte 1957 zusammen mit Gleichgesinnten das Audin Komitee ins Leben, welches es sich zum Ziel gesetzt hatte, die Affäre Audin publik zu machen und ihre Umstände aufzuklären.

Sein Einsatz für die Freiheitsrechte der Menschen in Algerien blieb nicht ohne persönliche Folgen für Schwartz. 1960 unterzeichnete er das Manifest der 121, welches den französischen Soldaten im Algerien-Krieg das Recht auf Befehlsverweigerung einräumte. Daraufhin wurde er vom Verteidigungsminister von seiner Professorenstelle an der von Militärs geführten Ecole Polytechnique für ein Jahr suspendiert. Auch seine Familie lebte Anfang der 60er Jahre in ständiger Gefahr. Es drohten Sprengstoffanschläge auf ihre Wohnung durch die OAS (Organisation Armée Secrète), einer terroristischen Geheimarmee, die 1961 einen Putsch in Algier durchgeführte hatte. Diese faschistische Organisation entführte auch Schwartz' Sohn Marc André, der Mitglied einer offensiven linksradikalen Bewegung war. Die traumatische Erfahrung der Entführung ist unter anderem auch für Marc Andrés spätere psychische Probleme verantwortlich zu machen, die schließlich im Jahr 1971 zu dessem Selbstmord führten. Während des selbstlosen Engagements für Algerien war Schwartz so sehr vom politischen Geschehen vereinnahmt, dass für einige Zeit seine mathematischen Arbeiten komplett zum Erliegen kamen.

b) Vietnam

Vietnam hatte sich kaum von den Folgen des Indochina-Kriegs Frankreichs von 1946-54 erholt, als der erbitterte Kampf der USA von 1965 bis 1975 gegen das kommunistische Regime Nord-Vietnams weite Landesteile verwüstete. Schwartz schloss sich 1967 dem vom Mathematiker Russel initiierten Tribunal an, welches amerikanische Kriegsverbrechen aufdeckte und anklagte. 1968 unternahm er auf Einladung der vietnamesischen Regierung seine erste Reise in das vom Krieg zerstörte Land. Zu dem recht liberal eingestellten Premierminister Pham Van Dong entwickelte er eine freundschaftliche Beziehung und setzte sich bei ihm für die Beachtung der Menschenrechte ein. So erwirkte er die Freilassung zahlreicher unrechtmäßig inhaftierter Gefangener und bewarb die Einladung einer Kommission von Amnesty International, welche schließlich 1979 die Zustände im Land untersuchte.

In der französischen Tageszeitung „Le Monde" veröffentlichte Schwartz im Dezember 1978 zusammen mit der Historikerin Madeleine Rebérioux einen Artikel, welcher im Vietnam nach Zensur der kritischen Passagen nachgedruckt wurde. Im Gegensatz zur sonstigen Presse, die dem Vietnam einseitig feindselig gegenüberstand, gaben Schwartz und Rebérioux ein differenziertes Bild der hoffnungslos elenden Lage des vietnamesischen Volks ab, das von großer Wirkung auf das Meinungsbild der französischen wie auch der vietnamesischen Öffentlichkeit war.

Während seiner Besuche knüpfte Schwartz überdies zahlreiche wissenschaftliche Kontakte, die er auch nach dem Krieg weiterhin rege pflegte. Seine Hilfsbereitschaft hat ihn so beliebt gemacht, dass er noch heute von vielen vietnamesischen Studenten als der Patenonkel aller Vietnamesen bezeichnet wird.

c) Das „Comité des Mathématiciens"

Zeitgleich zu seinem Engagement im Vietnam kämpfte Schwartz auch für die Rechte verfolgter Mathematiker. In der Sowjet-Union wurden die Mathematiker Chikhanovitch und Pliouchtch in psychiatrischen Anstalten festgehalten und mit Drogen vergiftet, da sie Bourbaki übersetzt beziehungsweise sich für die Menschenrechte stark gemacht hatten. Nach dem Bekanntwerden der Fälle schlug der amerikanische Mathematiker Lipman Bers die Gründung eines Komitees zur Verteidigung der sowjetischen Kollegen vor. Für dieses so genannte „Comité des Mathématiciens", das in Frankreich bald bis zu 500 Mitglieder zählte, engagierte sich Schwartz an vorderster Stelle. Mit der Unterstützung ähnlicher Vereinigungen, die in kurzer Zeit in weiteren Ländern entstanden waren, konnte das Komitee die Freilassung von Chikhanovitch und Pliouchtch erzwingen. In den folgenden Jahren nahm sich die Organisation weltweit weiterer Einzelschicksale unterdrückter Mathematiker erfolgreich an.

2. Engagement in der Bildungspolitik

Abgesehen von seinem Einsatz für die Außenpolitik ist Schwartz in Frankreich auch für sein Engagement in der Bildungspolitik bekannt geworden. Zu der Zeit als Schwartz Professor an der Ecole Polytechnique war, stellte diese Elite-Hochschule zwar eine erstklassige Ausbildungsstätte für Ingenieure dar, betrieb jedoch kaum aktive Forschung. Mit seinen Reformideen gelang es ihm dieses Defizit auszugleichen und so das Potential der äußerst begabten Studenten zu nutzen. Zur Förderung talentierter junger Mathematiker gründete der das „laboratoire de mathématique", das sich zu einer international bekannten Forschungsstätte entwickelte.

Nach der Reform der Ecole Polytechnique bemühte sich Schwartz darum Wege zu finden, um die französischen Hochschulen wettbewerbsfähiger zu machen. In diesem Zusammenhang setzte er sich für die allgemeine Einführung von Auswahlverfahren für den Zugang zu den Hochschulen ein. Sein Modell der „sélection" fand jedoch keinen Anklang und wurde nie verwirklicht.

1981 beauftragte die Regierung Mitterand Schwartz einen Report mit Empfehlungen zur Reform der Hochschulen zu erstellen. Daraufhin wurde er 1985 Präsident des von ihm vorgeschlagenen Komitees zur Evaluation der Hochschulen.

III. Die Entwicklung der Theorie der Distributionen

Zu Beginn des 20. Jahrhundert erwuchs aus verschiedenen Teilbereichen der Analysis die Notwendigkeit verallgemeinerte Funktionen einzuführen. Der klassische Funktionsbegriff, so wie ihn Dirichlet geprägt hatte, erschien allzu begrenzt und führte bei der Weiterentwicklung vieler Theorien oft zu Widersprüchen und nicht definierten Objekten. Laurent Schwartz kanalisierte verschiedene Strömungen der Entwicklung und schuf 1944 eine allgemeine Theorie der verallgemeinerte Funktionen, welche bei ihm Distributionen heißen. Seine Entdeckung, die er 1950/51 ausführlich in einer zweibändigen Monographie präsentierte, ist heute ein Teil des Fundaments der modernen Analysis, findet aber auch in vielen anderen Bereichen der Mathematik, wie zum Beispiel der Funktionalanalysis, ihre Anwendung.

1. Vorgeschichte der Distributionen-Theorie

Schon vor Laurent Schwartz tauchten in einer Reihe wissenschaftlicher Arbeiten grundlegende Konzepte zu verallgemeinerte Funktionen auf, oft ohne dass sich die Verfasser dessen bewusst waren. Ihre Ansätze, welche nur für die Anwendung auf spezielle Probleme konzipiert waren, erreichten allerdings nie den Grad einer allgemeinen Theorie.

a) Verallgemeinerte Funktionen in der Physik

Im ersten Viertel des 20. Jahrhunderts wurden zur Beschreibung elektrischer und quantenmechanischer Phänomene Rechenmethoden in die Physik eingeführt, die mathematisch eigentlich keinen Sinn ergaben und nur heuristisch begründet werden konnten. Da die Physiker dennoch damit große Erfolge erzielten, vermutete man, dass ihr Kalkül im Rahmen einer Theorie verallgemeinerter Funktionen gerechtfertigt werden könnte.

Der Symbolische Kalkül von Heaviside

Der Elektroingenieur O. Heaviside entwickelte 1893/94 einen symbolischen Kalkül zur Lösung der Differenzialgleichungen der Elektrotechnik. Sein wichtigstes Hilfsmittel war das Faltungsprodukt von Funktion

$$(f*g)(t):=\int_0^t f(s)\,g(t-s)\,\mathrm{d}s \quad .$$

Dabei seien *f*, *g* außerhalb der positiven reellen Halbachse gleich null, da sie Einschaltvorgänge beschreiben.

Außerdem definierte er die so genannte Einheitsstufenfunktion $Y:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, die heutzutage als Heaviside-Funktion bekannt ist, durch

$$Y(t):=\begin{cases}0 & \text{für} \quad t<0\\ 1 & \text{für} \quad t\geq 0\end{cases} \quad .$$

Obwohl diese Funktion bei 0 nicht stetig ist, gab er für ihre Ableitung Y', die man häufig auch mit δ bezeichnet,

$$Y'(t):=\begin{cases}\infty & \text{für} \quad t=0\\ 0 & \text{für} \quad t\neq 0\end{cases}$$

an und bemerkte die Eigenschaft

$$\int_{-\epsilon}^{+\epsilon} Y'(t)\,\mathrm{d}t=Y(\epsilon)-Y(-\epsilon)=1 \quad \text{für alle}\ \epsilon>0 \quad .$$

Daraus folgen schon erste Widersprüche: $\int 2Y'=2\int Y'=2$, andererseits gilt jedoch, wegen $2Y'=Y'$, $\int 2Y'=\int Y'=1$.

Für das Faltungsprodukt einer Funktion *f*, die außerhalb der positiven Halbachse gleich null sei, und der Ableitung *Y*', für die wir von nun ab δ schreiben wollen, erhielt er

$$(\delta * f)(t)=\int_{-\epsilon}^{t}\delta(s)f(t-s)\,\mathrm{d}s=\int_{-\epsilon}^{t}\delta(s)f(t)\,\mathrm{d}s=f(t)\int_{-\epsilon}^{t}\delta(s)\,\mathrm{d}s=f(t) \quad .$$

Es gilt also $\delta * f=f$, was er zu $\delta^{(n)} * f=f^{(n)}$ verallgemeinerte.

Da sich die Faltung mit δ somit neutral verhält, ging Heaviside zu einer symbolischen Schreibweise über, in der er das Faltungsprodukt $f*g$ multiplikativ als *FG* schrieb, wobei Funktionen nun mit Großbuchstaben bezeichnet wurden und von der Variablen p abhängen sollten, und δ durch 1 repräsentiert wurde. Folgende Übersicht fasst die Symbolik zusammen:

$f*g$	FG
δ	1
δ'	p
$\delta^{(n)}$	p^n

Mit $\delta^{(n)} * f=f^{(n)}$ folgt also, dass man durch Multiplikation von p^n an F die n-te Ableitung von f bilden kann. Für die Heaviside-Funktion Y ergab sich somit die Darstellung $1/p$, denn $Y'=\delta$ schreibt sich symbolisch als $pY=1$.

Als Beispiel zeigen wir, dass man der Funktion $Y(t)\mathrm{e}^{at}$ das Symbol $\frac{1}{p-a}$ zuordnet:

$$\mathrm{D}(Y(t)\mathrm{e}^{at})=\delta(t)\mathrm{e}^{at}+Y(t)a\,\mathrm{e}^{at}=\delta(t)+Y(t)a\,\mathrm{e}^{at} \;\Rightarrow\; (\mathrm{D}-a)(Y(t)\mathrm{e}^{at})=\delta \;,$$

also entspricht $Y(t)\mathrm{e}^{at}$ dem Symbol $\frac{1}{p-a}$.

Mit diesem Ergebnis können wir nun zur weiteren Illustration des Heaviside'schen Kalküls die inhomogene Differenzialgleichung $(\mathrm{D}^2+5\,\mathrm{D}+6)f=g$ mit der symbolischen Methode lösen. In symbolischer Schreibweise lautet diese Gleichung $(p^2+5\,p+6)F=G$. Wir lösen auf und erhalten $F=\frac{G}{p^2+5\,p+6}=\frac{G}{p-3}-\frac{G}{p-2}$, was in gewöhnlicher Schreibweise $g*Y(t)(\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t})$ bedeutet. Wir schreiben noch diese Faltung explizit aus und bekommen als Lösung der Differenzialgleichung $f(t)=Y(t)\int_0^t(\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{2t})g(t-s)\,\mathrm{d}s$.

Heaviside konnte auf ähnliche Weise zahlreiche klassisch abgeleitete Ergebnisse reproduzieren. In Mathematikerkreisen stießen seine Methoden jedoch gänzlich auf Ablehnung, da ihnen die Begründung fehlte. Obwohl die Richtigkeit seiner Resultate bereits andeutete, dass es eine Rechtfertigung für seinen Kalkül geben müsste, dauert es noch Jahrzehnte bis sich Mathematiker um eine strenge Erklärung der symbolischen Methode bemühten. Erst 1926 kümmerten sich Wiener und Carson, beziehungsweise 1932 Vanderpool, um eine Rechtfertigung. In ihren Arbeiten tauchten dabei erste Konzepte auf, die später bei den verschiedenen Ansätzen zu verallgemeinerten Funktionen Verwendung fanden.

Diracs δ-„Funktion“

Für die Zwecke der Quantenmechanik führte Dirac 1926 eine uneigentliche Funktion δ ein, für die er die folgenden definierenden Eigenschaften angab:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=1 \quad \text{und} \quad \delta(x)=0 \text{ für } x\neq 0 \quad .$$

Offensichtlich entspricht δ der Ableitung *Y*' der Heaviside-Funktion. Des Weiteren folgerte er aus der Definition die wichtige Beziehung:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=f(a)$$

Dirac war sich bewusst, dass seine Definition von δ im mathematischen Sinn nicht korrekt war und sprach von δ als „improper function“. Er gab auch die Ableitung δ' der δ-Funktion an und beschrieb δ' als „an even more discontinous and improper function than $\delta(x)$ itself“. Auf Grundlage der δ-Funktion baute er sich einen mathematisch Apparat auf, der zwar nicht streng fundiert war, mit dessen Hilfe er aber trotzdem bedeutende Ergebnisse auf dem Gebiet der relativistischen Quantentheorie ableitete.

Schon vor Heaviside arbeiteten viele Mathematiker mit der δ-Funktion. Erstmals trat sie im Jahr 1822 bei Fourier in Verbindung mit Fourier-Reihen auf. Äquivalent zur oben angegebenen Formulierung Diracs, wurde sie noch auf manch andere Art und Weise definiert, jedoch erreichte man nie mathematische Strenge. Physiker bevorzugten meist die besonders intuitive Definition der δ-Funktion über Funktionenfolgen, wie sie zum ersten Mal in einer 1891 erschienen Arbeit Kirchhoffs auftrat:

$$\delta(x) := \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-k^2 x^2}$$

Diese Definition über eine offensichtlich divergente Folge stützt die Vorstellung von der δ-Funktion als Massen- oder Ladungsdichte einer im Ursprung konzentrierten punktförmigen Einheitsmasse bzw. -ladung. Besonders nützlich war diese Auffassung in der Elektrodynamik, da sie gestattete punktförmige Objekte mit den gleichen Mitteln behandeln zu können wie kontinuierliche Dichteverteilungen.

Wir wollen die Interpretation der δ-Funktion als Dichteverteilung eines Punktes anhand eines Beispiels aus der Mechanik veranschaulichen. Eine kontinuierliche Massen-Dichteverteilungen $\rho(x)$ besitzt bezüglich des Ursprungs das Trägheitsmoment $J = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x) \|x\|^2 \mathrm{d}^3 x$. Wollen wir nun das Trägheitsmoment eines punktförmigen Objekts der Masse m im Punkt a bezüglich des Ursprungs berechnen, so setzen wir für $\rho(x) = m\,\delta(x-a)$ als Massendichte in die Formel für J. Dann erhalten wir unter Beachtung der Eigenschaften der δ-Funktion das bekannte Ergebnis

$$J = \int_{\mathbb{R}^3} m\,\delta(x-a) \|x\|^2 \mathrm{d}^3 x = m\|a\|^2 \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-a)\, \mathrm{d}^3 x = m\|a\|^2 \quad .$$

b) Verallgemeinerte Fouriertransformationen

Klassisch definiert man zu einer Funktion $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ ihre Fouriertransformierte $\hat{f}$ als

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}^n x \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Die Fouriertransformation kann man umkehren gemäß der Formel

$$f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle} \mathrm{d}^n \xi \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad .$$

Dabei muss man fordern, dass mit $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ auch $\hat{f} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ gilt, was für viele Anwendungsgebiete eine allzu einschränkende Voraussetzung ist. Deshalb gab es verschiedene Versuche Fouriertransformationen für Funktionen einzuführen, für die das klassische Fourierintegral divergierte. Dabei gelangte man oft zu verallgemeinerten Funktionsbegriffen.

Der am weitesten entwickelte Beitrag auf diesem Gebiet stammte von S. Bochner. Im letzten Kapitel seines berühmten Lehrbuchs „Vorlesungen über Fouriersche Integrale“ aus dem Jahr 1932 versuchte er eine Differenzialgleichung mit Hilfe der gewöhnlichen Fouriertransformation zu lösen, musste jedoch feststellen, dass diese Methode das Problem zu stark einschränkte. Daraufhin erarbeitete er ein Konzept verallgemeinerter Fourierintegrale, welches der Fouriertransformation im Raum der temperierten Distributionen nach Schwartz sehr nahe kommt. Allerdings bleibt bei Bochner die Fourier-Inversion weiterhin gewissen abgeschwächten Bedingung unterworfen.

In späteren Jahren widmete sich Bochner auch noch verallgemeinerten Lösungen von Differenzialgleichungen. Allerdings erkannte er nicht den Zusammenhang zu seinen früheren Ergebnissen zum verallgemeinerten Fourierintegral, so dass er seine verschiedenen Ansätze nicht zu einem allgemeinen Konzept verallgemeinerter Funktionen bündelte. Dieser entscheidende Schritt sollte Laurent Schwartz vorbehalten bleiben.

c) Verallgemeinerte Lösungen von Differenzialgleichungen

Eine der bedeutendsten Strömungen in der Entwicklung eines verallgemeinerten Funktionsbegriffs entstand auf dem Gebiet der Differenzialgleichungen, wo man bestrebt war, durch die Einführung verallgemeinerter Ableitungen das Hindernis der Differenzierbarkeit zu überwinden. Das Problem lag darin, dass beispielsweise von den Lösungen $u=f(x+y)+g(x-y)$ der Differenzialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ gefordert werden muss, dass f und g zweimal partiell differenzierbare Funktionen sind. Man wollte nun den Lösungsbegriff so erweitern, dass man auch Funktionen, die nicht die vollen Anforderungen an die Differenzierbarkeit erfüllen, als Lösungen zulassen kann. Dass dies sinnvoll und notwendig ist, zeigt unter anderem das Beispiel der Saite mit knickförmiger Anfangsgestalt als Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

Schwache Lösungen nach J. Leray

J. Leray umgeht bei seiner Definition der schwachen Lösung einer Differenzialgleichung das Problem der Differenzierbarkeit durch die Verwendung von adjungierten Differenzialoperatoren und Testfunktionen. In modernisierter Ausdrucksweise lautet seine Definition von 1934:

Sei L ein linearer Differenzialoperator auf einem Gebiet $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Eine Funktion $u\in\mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$ heißt schwache Lösung der Differenzialgleichung $\mathrm{L}u=0$, wenn gilt

$$\int_\Omega (\mathrm{L}\,u)\varphi\,\mathrm{d}^n x=\int_\Omega u(\mathrm{L}^*\varphi)\,\mathrm{d}^n x=0$$

für alle Testfunktionen $\varphi\in\mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$, wobei L^* den zu L adjungierten Differenzialoperator bezeichnet.

Statt u zu differenzieren testet man also mit den Funktionen aus dem Raum $\mathscr{C}^\infty_c(\Omega)$ das Bestehen der obigen Beziehung, was auch den Namen „Testfunktionen“ erklärt.

Leray ist nicht der erste Forscher auf dem Gebiet der Differenzialgleichungen, der verallgemeinerte Lösungen mit Hilfe von Testfunktionen definierte. Jedoch war seine Formulierung für die Entwicklung der Distributionen-Theorie wegweisend, zumal Schwartz während seiner Studienzeit eine Vorlesung von Leray besuchte und so dessen Konzepte kennenlernte.

Die Funktionale von Sobolev

Das Interesse des sowjetischen Mathematikers S. L. Sobolev galt vor allem den partiellen Differenzialgleichungen vom hyperbolischen Typ. In einer Arbeit aus dem Jahr 1936 über das Cauchy-Problem führte er eine Verallgemeinerung des Funktionenbegriffs ein, die im wesentlichen den späteren Definitonen von Schwartz glich. Sobolev hatte es sich zur Aufgabe gemacht, die Differenzialgleichung

$$\mathrm{G}\,u:=\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{2k+1}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F$$

unter den Anfangsbedingungen

$$u|_{t=0} = u^{(0)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^{(1)}(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1})$$

zu lösen. Dabei sind A_{ij}, B_i und C analytische Funktionen von $x_1,\ldots, x_{2k+1}$ und t.

Unter der Voraussetzung, dass eine Lösung u existiert mit beschränkten Ableitungen bis zu $(k+1)$-ter Ordnung, konnte er eine Lösungsformel in Abhängigkeit von $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ und F rekursiv mit klassischen Methoden angeben. Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, ging er allerdings dazu über, dieses Cauchy-Problems in einem Raum von Funktionalen zu beschreiben.

Hierzu definiert Sobolev den Raum Φ_s der s-mal stetig differenzierbaren Funktionen der Variablen $x_1,\ldots,x_{2k+1},t$ mit kompaktem Träger, d. h. $\Phi_s := \mathscr{C}_c^s$, den er mit folgendem Konvergenzbegriff ausstattet: Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus Φ_s konvergiere gegen ein $\varphi\in\Phi_s$, in Zeichen $\varphi_n \xrightarrow{s} \varphi$, wenn gilt:

i) Es gibt ein Kompaktum $K\subset\mathbb{R}^{2k+2}$, so dass $\mathrm{Supp}(\varphi_n)\subset K$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $\mathrm{Supp}(\varphi)\subset K$.

ii) Für jeden Multiindex $\alpha\in\mathbb{N}^s$ konvergiert die Folge der Ableitungen $D^\alpha\varphi_n$ für $n\to\infty$ gleichmäßig auf K gegen $D^\alpha\varphi$.

Des Weiteren definiert er die Funktionalräume Z_s als Räume der stetigen linearen Funktionale $\rho: \Phi_s\to\mathbb{R}$, $\varphi \longmapsto (\rho,\varphi)$, wobei Stetigkeit von $\rho\in Z_s$ bedeutet, dass aus $\varphi_n \xrightarrow{s} \varphi$ stets folgt $\rho(\varphi_n) \xrightarrow{s} \rho(\varphi)$. Analog definiert er die Unterräume $W_s\subset Y_s\subset Z_s$ von Z_s als Räume der stetigen linearen Funktionale auf speziellen Obermengen $\Psi_s\supset\Omega_s\supset\Phi_s$ von Φ_s.

Außerdem führte Sobolev auf den Funktionalräumen Differenzialoperatoren ein, indem er zeigte, dass zu einem Differenzialoperator $\mathrm{L}: \Phi_{s_2}\to\Phi_{s_1}$ ein adjungierter Operator $\mathrm{L}^*: Z_{s_1}\to Z_{s_2}$ eindeutig definiert ist durch die Bedingung

$$(\mathrm{L}^*\rho,\varphi) = (\rho, \mathrm{L}\varphi) \quad \text{für alle} \quad \rho\in Z_{s_1},\ \varphi\in\Phi_{s_2}\ .$$

Dies erlaubte ihm den Differenzialoperator G aus der oben angegebenen Differenzialgleichung auf die Räume Z_s, und analog auf Y_s und W_s, zu übertragen. Es gelang ihm zu zeigen, dass G auf $Y = \cup_{s=0}^{\infty} Y_s$ ein Inverses besitzt. Damit konnte er beweisen, dass in Y immer eine eindeutige Lösung $\underline{u}\in Y$ der untersuchten Differenzialgleichung existiert. Dagegen stellte er fest, dass die Existenz einer klassischen Lösung des Cauchy-Problems aus der verallgemeinerten Funktional-Lösung $\underline{u}$ nur dann folgt, wenn $\underline{u}$ gewisse Bedingungen erfüllt.

2. Die Distributionen-Theorie von Laurent Schwartz

Als Schwartz im Jahr 1944 die Theorie der Distributionen entwickelte, hatte er nur vereinzelt Kenntnis von den Ansätzen anderer Mathematiker zu verallgemeinerten Funktionen, vor allem weil der internationale wissenschaftliche Austausch durch den Krieg erheblich erschwert war. Aus der hier nur unvollständig aufgeführten Vorgeschichte waren ihm lediglich die Dirac'sche δ-Funktion und die schwache Lösung nach Leray bekannt. Darüber hinaus nannte er als für ihn richtungsweisende Grundlagen die parties finies von Hadamard und seine eigene Beschäftigung mit der Dualität in topologischen Vektorräumen. Gerade von jenen Konzepten, die seinen Distributionen am nächsten kamen, namentlich die verallgemeinerte Fouriertransformation von Bochner und Sobolevs Funktionale, wusste er damals noch nichts. Aufbauend auf Sobolevs und Bochners Arbeiten wäre es natürlich ein Leichtes gewesen, die Distributionen-Theorie zu entwickeln, weshalb Schwartz in seiner berüchtigten Bescheidenheit einräumte, dass damals die Zeit für verallgemeinerte Funktionen einfach reif war und dass Distributionen, wenn nicht durch ihn, dann sicherlich in den Folgejahren durch einen anderen

Mathematiker entdeckt worden wären. Nichtsdestotrotz bleibt die Ausprägung der Theorie ein unbestreitbares Verdienst von Schwartz'.

Zunächst werden wir nun Distributionen kennen lernen und erfahren, inwiefern sie als Verallgemeinerung von Funktionen anzusehen sind. In den sich anschließenden Abschnitten wird die Leistungsfähigkeit der Distributionen demonstriert, indem wir die Probleme aus dem letzten Kapitel erneut ihm Rahmen der Theorie von Schwartz untersuchen. Dabei wird die Vielseitigkeit und Einfachheit der Distributionen-Theorie zu Tage treten.

Definition der Distribution

Zunächst definierte Schwartz den Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktionen als den Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, d. h.

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) := \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad ,$$

den er mit folgendem Konvergenzbegriff ausstattete: Eine Folge $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathscr{D}$ konvergiere gegen ein $\varphi \in \mathscr{D}$, in Zeichen $\varphi_\nu \underset{\mathscr{D}}{\to} \varphi$, wenn gilt:

i) Es gibt ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$, so dass $\operatorname{Supp}(\varphi_\nu) \subset K$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ und $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset K$.

ii) Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ konvergiert die Folge der Ableitungen $\mathrm{D}^\alpha \varphi_\nu$ für $\nu \to \infty$ gleichmäßig auf K gegen $\mathrm{D}^\alpha \varphi$.

Eine Distribution im $\mathbb{R}^n$ ist dann eine stetige lineare Abbildung

$$T: \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto T[\varphi] \ .$$

Dabei bedeutet Stetigkeit von T, dass aus $\varphi_\nu \underset{\mathscr{D}}{\to} \varphi$ stets folgt $T[\varphi_\nu] \to T[\varphi]$. Den Vektorraum aller Distributionen im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man mit $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Auf $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ hat man folgenden Konvergenzbegriff: Eine Folge $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von Distributionen aus $\mathscr{D}'$ konvergiere gegen ein $T \in \mathscr{D}'$, in Zeichen $T_\nu \underset{\mathscr{D}'}{\to} T$, wenn gilt:

$$\lim_{\nu \to \infty} T_\nu[\varphi] = T[\varphi] \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \ .$$

Ohne Kenntnis von Sobolevs Arbeiten zu haben definierte Schwartz seine Distributionen also gerade so wie Sobolev seine Funktionale definiert hatte, bis auf den Unterschied, dass Sobolevs Testfunktionen aus den Räumen $\mathscr{C}_c^s$ mit $s \in \mathbb{N}$ nicht beliebig oft differenzierbar waren. Zur damaligen Zeit war der Raum $\mathscr{C}_c^\infty$ noch kaum in der Mathematik aufgetreten. Trotz der Einwände seines Freundes H. Cartan gegenüber der Verwendung von $\mathscr{C}_c^\infty$-Funktionen als Testfunktionen, dem diese als „zu monströs“ erschienen, hielt Schwartz an seinem Konzept fest, was ihm in mancherlei Gesichtspunkten die Entwicklung der Distributionen-Theorie erleichterte.

Beispiele von Distributionen

Die folgende Definition gibt Auskunft darüber, wie der klassische Funktionsbegriff in der Theorie der Distributionen enthalten ist.

Sei $f \in \mathscr{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird durch

$$T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) \, \mathrm{d}^n x$$

eine Distribution definiert. Das durch f definierte T_f heißt reguläre Distribution.

Man kann jedem $f \in \mathscr{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ohne Verlust von Informationen eine reguläre Distribution zuordnen. Der Kern der Abbildung $\mathscr{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto T_f$, ist die Menge aller $g \in \mathscr{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, die fast überall null sind.

Darüber hinaus treten noch Distributionen auf, welche keine regulären Distributionen sind, d. h., die also nicht aus $\mathscr{L}^1_{loc}$ -Funktionen hervorgehen. Einfachstes und wichtigstes Beispiel hierfür ist die so genannte Delta-Distribution:

Sei $a \in \mathbb{R}^n$. Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ setzt man

$$\delta_a[\varphi] := \varphi(a) \ .$$

Dadurch wird eine Distribution $\delta_a \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert, die Delta-Distribution zum Punkt a.

Die Delta-Distribution ist die mathematisch korrekte Fassung der Dirac'schen δ-Funktion. Sie ist, wie gesagt, keine reguläre Distribution, auch wenn Diracs symbolische Schreibweise $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x-a)\,\mathrm{d}x = \varphi(a)$ es vermuten lässt. Schwartz hat somit sein Anliegen verwirklicht, diese uneigentliche Funktion der Physiker in eine allgemeine Theorie einzubinden, mit der auch der symbolische Kalkül gerechtfertigt werden konnte.

Mit dem Konvergenzbegriff in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ kann man nun auch mit Hilfe von Folgen eine strenge Definition von δ_0 angeben:

Sei $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k(x) := k^n f(kx)$. Dann gilt für alle $\varphi \in \mathscr{D}$

$$\lim_{k\to\infty} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}^n x = \varphi(0), \quad \text{d. h.} \quad T_{f_k} \underset{\mathscr{D}'}{\rightarrow} \delta_0 \ .$$

(Beweis mit dem Transformations-Satz für das Lebesgue-Integral)

Wählt man zum Beispiel im eindimensionalen Fall $f(x) := \frac{1}{\sqrt{(\pi)}} \mathrm{e}^{-x^2}$, so ist $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ erfüllt. Man erkennt dann in $f_k(x) = \frac{k}{\sqrt{(\pi)}} \mathrm{e}^{-k^2x^2}$ die im gewöhnlichen Sinn divergente Funktionenfolge aus der Definition Kirchhoffs wieder. In $\mathscr{D}$ dagegen konvergiert die Folge der regulären Distributionen T_{f_k} , also die Verallgemeinerung der Folge f_k, und zwar gegen die nicht reguläre Delta-Distribution $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Definition von Differenzialoperatoren für Distributionen

Das Problem der Differenzierbarkeit zu bewältigen war eines der Hauptziele bei der Entwicklung verallgemeinerter Funktionen. Wir werden nun sehen wie Schwartz auf $\mathscr{D}$ lineare Differenzialoperatoren einführte, so dass jede Distribution unendlich oft differenzierbar wird.

Man will zu einem Differenzialoperator L einen Differenzialoperator auf $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ definieren, den man wieder L nennt, so dass man für reguläre Distributionen T_f nichts Neues erhält, dass also gilt:

$$\mathrm{L}T_f = T_{\mathrm{L}f} \ .$$

Weiterhin ist L auf $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ so einzuführen, dass die für Testfunktionen $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ allgemein gültige Eigenschaft

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{L}f)\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathrm{L}*\varphi) \ , \quad \text{d. h.} \quad T_{\mathrm{L}f}[\varphi] = T_f[\mathrm{L}^*\varphi] \ ,$$

von L und dessen adjungiertem Operator L^* bestehen bleibt. Deshalb definierte Schwartz:

Sei $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ und L ein linearer Differenzialoperator auf $\mathbb{R}^n$. Dann setzen wir:

$$(\mathrm{L}T)[\varphi] := T[\mathrm{L}^*\varphi] \ .$$

Dabei gehört LT wieder zu $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Hierbei erkennt man deutlich, dass Schwartz für die Definition der Differentiation von Distribution Lerays Idee der schwachen Lösung einer Differenzialgleichung aufgriff.

Fouriertransformation im Raum der temperierten Distributionen

Ähnlich wie bei den Differenzialoperatoren, soll die Fouriertransformierte einer Distribution so definiert werden, dass man für reguläre Distributionen nichts Neues erhält, dass also gilt:

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}} \quad .$$

Außerdem soll die Regel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x)\mathrm{d}^n x = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\hat{\varphi}(y)\mathrm{d}^n y \ , \quad \text{d. h.} \quad T_{\hat{f}}[\varphi] := T_f[\hat{\varphi}]$$

erhalten bleiben. Deshalb setzte Schwartz

$$\hat{T}[\varphi] := T[\hat{\varphi}] \quad \text{für} \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$

Damit das definiert ist, musste er jedoch den Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ der Testfunktionen verkleinern zum Raum $\mathscr{S}$ der schnell fallenden Funktionen und den Raum $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ der Distributionen vergrößern zum Raum $\mathscr{S}$ der temperierten Distributionen. Die Definitionen dieser Räume sollen hier nur kurz erwähnt werden:

Mit $\mathscr{S} \supset \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass es zu jedem Paar $(\alpha, j) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0$ eine Zahl $C_{\alpha, j} \in \mathbb{R}_+^*$ gibt mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ : \ (1 + \|x\|^j)\left|\mathrm{D}^\alpha \varphi(x)\right| \ \leq \ C_{\alpha, j} \quad .$$

Die Funktionen aus $\mathscr{S}$ heißen schnell fallende Funktionen.

Eine temperierte Distribution ist eine stetig lineare Abbildung

$$T : \mathscr{S} \to \mathbb{C} \ , \qquad \varphi \longmapsto T[\varphi] \ .$$

Den Raum aller temperierter Distributionen bezeichnet man mit $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Zu Beachten ist dabei, dass Schwartz auch an das Problem der Fouriertransformation angepasste Konvergenzbegriffe einführte.

Der entscheidende Vorteil der temperierten Distributionen ist, dass für jedes $T \in \mathscr{S}'$ auch wieder $\hat{T} \in \mathscr{S}'$ ist und somit problemlos die Inversion der Fouriertransformation durchgeführt werden kann.

Als Beispiel bilden wir die Fouriertransformierte der Delta-Distribution. Fasst man δ als eine Abbildung von $\mathscr{S}$ nach $\mathbb{C}$ auf, so ist δ eine temperierte Distribution. Die Fouriertransformierte von δ_a ist eine reguläre Distribution, $\hat{\delta}_a = T_{e_{-a}}$, mit $e_a(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x, a\rangle}$, $x, a \in \mathbb{R}^n$.

Umgekehrt ist δ_a die Fouriertransformierte einer regulären Distribution, $\hat{T}_{e_a} = \delta_a$.

C) Ein Mann vieler Leidenschaften

Laurent Schwartz war ein sehr vielseitig engagierter Mann des 20. Jahrhunderts. Nicht allein seine bedeutenden Beiträge zur Entwicklung der modernen Mathematik zeichneten ihn aus, sondern er stach auch durch sein folgenreiches politisches Wirken hervor. Doch damit nicht genug. Eine weitere Passion von Laurent Schwartz, die er als gleichermaßen ausgeprägt wie seine Leidenschaft für die Mathematik angab, war die Jagd nach Schmetterlingen. In entomologischen Kreisen ist er berühmt für seine rund 20.000 Falter umfassende Sammlung, darunter zahlreiche neu entdeckte Arten, die er auf Reisen in die ganze Welt zusammengetragen hatte und heute in brasilianischen und französischen Museen zu bestaunen ist. Über sechs Arten wurden sogar nach ihm benannt.

Literaturverzeichnis

[1] **L. Schwartz,** *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Edition Odile Jacob, Paris (1997).

[2] **F. Treves, G. Pisier, M. Yor,** *Laurent Schwartz (1915-2002).* Notices of the American Mathematical Society, (Okt. 2003) 1071-1084.

[3] **J. Lützen,** *The prehistory of the theory of distributions.* Springer-Verlag, New York (1982).