Hochschule Wismar   Gottlob Frege Centre

Proceedings

4rth Northern-Light Symposium

on Mathematical Education in Engineering

Hamburg-Bergedorf, September 2023

Heft 01 / 2023

Wismarer Frege-Reihe   Wismar Frege Series

Das **Gottlob-Frege-Zentrum** wurde am 7.11. 2000 an der Hochschule Wismar gegründet. Seine Mitglieder setzen sich für eine wissenschaftlich begründete, praxisorientierte, moderne und international ausgerichtete Ausbildung in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen ein.

Weitere Informationen zum Gottlob-Frege-Zentrum finden Sie im Netz unter

www.hs-wismar.de/frege

bzw. auf der Netzseite

https://www.hs-wismar.de/vernetzung/institutionen-hochschulunternehmen/gottlob-frege-zentrum/

ISSN 1862-1767

Printed in Germany

WFR Heft 01/2023

Inhalt / Contents

Thomas Schramm

Über das Unendliche

Abstract. Betrachtungen über das unendlich Kleine und Große in Mathematik, Naturwissenschaft und Philosophie. Sind unendlich große Mengen als Begründung für das unendlich Kleine in der Infinitesimalrechnung sinnvoll? Kann man vernünftig über die Frage diskutieren, ob das Universum endlich oder unendlich groß ist? Sind der Raum und die Zeit kontinuierlich? Und: ist das alles praktisch überhaupt relevant? Fern von finalen Antworten wollen wir zumindest den Fragen ein wenig näherkommen.

1. Einführung

„Der Weltraum, unendliche Weiten. Wir schreiben das Jahr 2200. …“
Raumschiff Enterprise, Deutscher Vorspann

Allein der Begriff des Unendlichen sprengt unsere Vorstellungen, obwohl er im gewöhnlichen Sprachgebrauch häufig als Synonym für ziemlich Großes oder Kleines genutzt wird. Die Evolution hat uns mit einer Wahrnehmung ausgestattet, die vielleicht von einem Zehntel Millimeter bis hin zu einigen Kilometern reicht. Schon die Vorstellung der Größenordnung von Mikroben, Viren oder gar Atomen, die uns heute mit Apparaten zugänglich sind, oder des Planetensystems, der Milchstraße bis zum beobachtbaren Universum, übersteigen unser Vorstellungsvermögen. Allein in den letzten Einhundert Jahren sind die zugänglichen Skalen in Raum und Zeit geradezu ex- bzw. implodiert. Im Kleinen durch immer bessere Uhren und Mikroskope bis hin zu Teilchenbeschleunigern und Interferometern, die Längen von 10^{-18} m tatsächlich messen können. Im Großen durch immer bessere Teleskope. „Bestand“ das beobachtete Universum noch vor Einhundert Jahren „nur“ aus der Milchstraße und einigen „Nebeln“ mit einem Durchmesser von ca. 200.000 Lichtjahren (immerhin ca. 1,9 10^{21} m), so geht man heute von der Existenz von etwa 200 Milliarden Galaxien in einer Entfernung von bis zu 46 Milliarden Lichtjahren aus, denn weiter können wir auch mit den besten Teleskopen prinzipiell nicht schauen. Für wahrnehmbare und messbare Zeiten kann man ähnliche Betrachtungen anstellen. Unendlich groß bzw. klein ist das alles keineswegs, denn es handelt sich um endliche Größen.

2. Die Philosophie der Unendlichkeit

„Unendlichkeit ist der Mangel an Grenzen.“
(Aristoteles)

Vorerst fern von praktischer Relevanz haben sich Denkerinnen und Denker spätestens seit der Antike mit dem Begriff des Unendlichen befasst. Aus der Zeit vorher, etwa aus den Hochkulturen Mesopotamiens, die mehr an praktischen

Berechnungen interessiert waren, ist das nicht bekannt. Aus der griechischen Antike sind jedoch viele Überlegungen überliefert, die bis heute Relevanz haben. Hier greifen wir nur einige Aspekte heraus. Dazu ist zu bemerken, dass es noch keine Aufteilung zwischen Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften gab, die eine Erfindung der Neuzeit ist.
Dem Vorsokratiker **Zenon** von Elea (ca. 490-430 v. Chr.) werden bis zu 40 Paradoxien zugerechnet, die die Lehren von **Parmenides** von Elea (ca. 520-460 v.Chr.) verteidigen sollten. Zenon beschäftigte sich vor Allem mit dem Problem des Kontinuums und dem Verhältnis von Raum, Zeit und Bewegung. Die bekanntesten Paradoxien sind sicher das von Achilles und der Schildköte [1] und das Pfeilparadoxon [2]. Beide führen auf das Problem der Teilbarkeit von Raum und Zeit und damit entweder auf ein kleinstes Diskretes oder die unendliche Teilbarkeit. Da die antike Mathematik noch kein konsistentes Konzept zur Berechnung unendlicher Summen bzw. eines lokalen Grenzwertes hatte, blieb die Situation bis zur Erfindung der Integral- und Differenzialrechnung durch Leibniz und Newton teilweise paradox. Allerdings kam **Aristoteles** (384-322 v. Chr.) der Lösung [1] begrifflich schon nahe, indem er argumentierte, dass eine unendliche Unterteilung einer Strecke nur potenziell und nicht wirklich durch Anhalten realisiert sei. Daher kann eine potenziell unendlich teilbare Strecke real ein Ganzes sein. Man denke auch an eine ganze Torte, die potenziell ad infinitum immer wieder halbierbar ist und trotzdem eine ganze Torte bleibt. Aristoteles führte damit für das unendlich Große und Kleine die Unterscheidung zwischen *potenziell* und *aktual* der Addition und der Teilung nach ein [3]. Er verstand, dass z.B. eine Zählung oder eine Aufteilung potenziell immer weiter durchgeführt werden kann, aber ohne, dass aktual ein Ende erreicht würde. Diese Unterscheidung und damit die Präzisierung des Begriffs der Unendlichkeit wird durch die Zeit bis heute mit unterschiedlichen Schlüssen genutzt.
Die philosophische auch religiös inspirierte Diskussion, ob die „Welt“ denn nun endlich oder unendlich ausgedehnt sei und ob die Zeit nun ein Anfang und ein Ende hätte, zog sich durch die Jahrhunderte und ist mit vielen berühmten Denkerinnen und Denkern verbunden. Galileo **Galilei** (1564–1641) z.B. meinte, dass wir als endliche Wesen das aktual Unendliche gar nicht verstehen könnten und uns daher mit dem potenziellen begnügen müssten, was aber für reale Probleme keine Rolle spiele. Erst mit Emanuel **Kant** (1724-1804) fand die Diskussion einen vorläufigen Abschluss. Er teilt Aristoteles Auffassung vom potenziellen und aktualen Unendlichen, zeigt aber in einigen sogenannten Antinomien, dass es für die Annahme eines endlichen oder unendlichen Raumes bzw. einer endlichen oder unendlichen Zeit jeweils gute Argumente (Beweise) gibt, dies daher nicht entscheidbar ist. Mehr noch, sind Raum und Zeit für Ihn die Vorbedingung der Erfahrung (a priori) und können daher nicht Erfahrung selbst sein. Für Kant ist der Raum und auch die darin für ihn geltende euklidische, mathematische Geometrie a priori [4]. In der Folge werden diese Konzepte von Georg Wilhelm Friedrich **Hegel** (1770- 1831), Arthur **Schopenhauer** (1788–

1860) bis Friedrich **Nietzsche** (1844-1900) akzeptiert, erweitert oder verworfen [5].

3. Die Mathematik und das Unendliche

„Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig."
(David Hilbert)

Spätestens mit der Erfindung oder Einführung der Differenzial- und Integralrechnung durch Isaac **Newton** (1642-1726) und Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646-1716) schienen sich Zenons Paradoxien aufgelöst zu haben. Newtons *Fluxationsrechnung* ermöglichte mit der Orts-Zeitableitung die Zuordnung einer momentanen Geschwindigkeit an einem Ort zu jeder Zeit und ließ damit den Pfeil Zenons wieder fliegen. Mit Leibniz Integralrechnung konnte man endlich unendlich viele gedacht kleiner werdende Teilflächen zu einem Ganzen aufsummieren, womit Achilles die Schildkröte endlich überholen konnte. Sehr schnell bemerkte man, dass beide Methoden lediglich zwei Seiten der gleichen Medaille sind. In beiden Berechnungen treten in der sukzessiven Näherung gedacht kleiner werdende Größen auf. Der Trick besteht nun darin die Formeln so umzuformen, dass man diese später *Differenziale* genannten Größen „gefahrlos" Null setzen kann und der verbleibende Rest der sogenannte *Grenzwert* das gesuchte Resultat ist. Der Gerechtigkeit halber muss man betonen, dass in der indischen Kerala-Gruppe um **Madhava** (1340-1425) schon früher ganz ähnliche Betrachtungen angestellt wurden und so der berühmte Urheberstreit zwischen Newton und Leibniz eine seltsame Note bekommt [6].
Newton und Leibniz war sehr wohl klar, dass dieser so gut funktionierende „Trick" einer tieferen Begründung bedurfte, weshalb Leibniz auch bei seiner Methode von einer „façon de parler" also von einer „Sprechweise" sprach [5]. Der Erfolg gab ihnen jedenfalls recht. Nicht wenige Autoren beschreiben die theoretische Entwicklung insbesondere in der Physik und im Ingenieurwesen bis zum Ende des 19. Jahrhunderts als eine Ausgestaltung und Anwendung dieser grundlegend neuen Methode. Die dabei entstehende klassische Mechanik galt als Blaupause für eine gute wissenschaftliche Theorie, nicht nur im Ingenieurwesen, sondern bis hin zu Teilen der Humanwissenschaften [7].
Trotz des großen Erfolgs gab es unter Mathematikerinnen und Mathematikern im 19. Jahrhundert und teilweise bis heute ein gewisses Unbehagen, weil eine saubere Begründung der Differenzialmethode immer noch ausstand. Die Lösung wurde in der Betrachtung der Zahlenmengen gesehen, auf denen diese Methode operiert. Die grundlegende Menge ist die der *natürlichen Zahlen* 0,1,2,3… und schon Aristoteles war bewusst, dass diese Menge zumindest potenziell unendlich ist, da man immer weiter zählen kann. Nimmt man die negativen Zahlen hinzu,

erhält man die *ganzen Zahlen* …-3.-2,-1,0,1,2,3… und bildet man daraus Quotienten, die *rationalen*. Nun war schon den Pythagoreern im 6. Jahrhundert v. Chr. klar, dass dies nicht die ganze Wahrheit sein konnte, denn die Diagonale eines Rechtecks war im Allgemeinen sicher keine rationale Zahl, konnte also nicht durch einen Bruch dargestellt werden. Man nennt diese Zahlen unglücklicherweise *irrational*, wie z.B. die Wurzel aus 2, also die Zahl, die mit sich selbst malgenommen 2 ergibt. Drückt man eine irrationale Zahl in einer Fließkommadarstellung aus, so erhält man eine nicht endende, nicht periodische Folge von Ziffern. Fasst man diese ganzen Zahlenmengen zusammen erhält man die Menge der *reellen* Zahlen. Georg **Cantor** (1845–1918) versuchte nun eine Theorie dieser Mengen aufzustellen, indem er sie als *aktual* unendlich betrachtete. Die Menge der natürlichen Zahlen war damit *ein* mathematisches Objekt, das betrachtet werden konnte. Die Anzahl der Zahlen in dieser Menge war also aktual und es wurde damit nicht nur die *Möglichkeit* beschrieben immer weitere Zahlen zu konstruieren. Mengen betrachtete man danach als gleich groß bzw. von gleicher *Mächtigkeit*, wenn man die natürlichen Zahlen auf sie abbilden konnte, sie also abzählbar waren. So ist die Menge der geraden Zahlen in diesem Sinne genauso groß wie die Menge der natürlichen, ebenso die Menge der ganzen Zahlen und sogar der rationalen, weil es eine Methode gibt alle möglichen Brüche abzuzählen. Das ist bei den reellen Zahlen nicht der Fall, sie lassen sich nicht abzählen und heißen daher *überabzählbar* unendlich. Schon zwischen 0 und 1 gibt es unendlich viele rationale Zahlen, aber noch sehr viel mehr reelle. Einige dieser Zahlen (wie die Wurzel aus 2) können durch einen Algorithmus genähert also konstruiert werden, viel mehr noch aber nicht. Aus der abzählbar unendlichen Menge der natürlichen Zahlen lässt sich die noch größere Menge aller Teilmengen, der sogenannten Potenzmenge konstruieren, die ebenso wie die reellen überabzählbar ist und so bildet sich eine aufsteigende Menge von Mächtigkeiten, die Menge der *transfiniten* Zahlen, die Cantor ebenfalls einführte. Ob es nun zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der der reellen noch eine dazwischenliegende Mächtigkeit gibt, war eine der großen nicht entschiedenen Fragen zu Beginn des 20. Jahrhunderts, deren Verneinung *Kontinuumshypothese* genannt wird.

Der Versuch die gesamte Mathematik auf dieser Mengenlehre aufzubauen, erhielt 1903 einen massiven Dämpfer als Bertrand **Russell** (1872-1970) zeigte, dass der Theorie ein Widerspruch bzw. eine neue *Antinomie* genannte Paradoxie innewohnte. Insbesondere für Gottlob Frege (1848-1925) war das niederschmetternd, der damit sein Lebenswerk, die Mathematik auf logische Wahrheiten zurückzuführen, als gescheitert ansehen musste. Erst Jahre später konnte durch Ernst **Zermelo** (1871-1953) und Abraham Adolf **Fraenkel** (1891-1965) gezeigt werden, wie durch eine saubere axiomatische *ZF* oder *ZFC* genannte Mengenlehre Paradoxien vermieden werden konnten.

Eine ausführliche Darstellung der gesamten Problematik findet man bei David **Hilbert** (1862-1943) in einem 1925 gehaltenem Vortrag mit dem Titel „Über das Unendliche“ [8] (die Übereinstimmung mit dem Titel dieses Artikels ist tatsächlich zufällig). Hilbert erkennt klar, dass die Endlichkeit oder Unendlichkeit des physikalischen Raumes im Kleinen wie im Großen sehr wohl ein Gegenstand der Empirie ist. Er betont zum Großen:

> *Die Meinung von der Unendlichkeit der Welt war lange Zeit die herrschende; bis zu Kant und auch weiterhin noch hegte man an der Unendlichkeit des Raumes überhaupt keinen Zweifel. ... Einstein hat die Notwendigkeit gezeigt, von der Euklidischen Geometrie abzugehen. Auf Grund seiner Gravitationstheorie nimmt er auch die kosmologischen Fragen in Angriff und zeigt die Möglichkeit einer endlichen Welt, und alle von den Astronomen gefundenen Resultate sind auch mit der Annahme der elliptischen Welt durchaus verträglich.*

Und zum Kleinen:

> *Und das Fazit ist jedenfalls, daß ein homogenes Kontinuum, welches die fortgesetzte Teilbarkeit zuließe, und somit das Unendliche im Kleinen realisieren würde, in der Wirklichkeit nirgends angetroffen wird. Die unendliche Teilbarkeit, eines Kontinuums ist nur eine in Gedanken vorhandene Operation, nur eine Idee, die durch unsere Beobachtungen der Natur und die Erfahrungen der Physik und Chemie widerlegt wird.*

Für die Mathematik aber feiert Hilbert die logische Fundierung der Analysis durch Weierstraß (1815-1897), der ebenso wie Dedekind (1831-1916) eine konsistente, logische Begründung der reellen Zahlen vorlegte. Allerdings bemerkt er, dass die dort beseitigt geglaubten Unendlichkeiten implizit immer noch vorhanden wären. Eine Lösung sieht er in Cantors Mengenlehre mit der Einführung der transfiniten Zahlen. Wir wollen das hier nicht weiterverfolgen, aber noch einem Kuriosum nachgehen. Hilbert legt eine Beweisskizze zur Lösung des Kontinuumproblems vor. Er führt aus:

> *Die Lösung dieses Kontinuumproblems gelingt durch die von mir entwickelte Theorie, und zwar ist eben* ***jener Nachweis der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems der erste und wichtigste Schritt zu dieser Lösung.*** *Die Beantwortung fällt in bejahendem Sinne aus: die Punkte einer Strecke können durch die Zahlen der zweiten Zahlklasse, d. h. durch bloßes Hinüberzählen über das abzählbare Unendlich ausgezählt werden, um es in populärer Form auszudrücken. Ich möchte diese Behauptung selbst den Kontinuumsatz nennen und den Grundgedanken des Beweises dafür hier inhaltlich kurz darlegen.*

Hilbert glaubte also noch 1925, dass man zeigen kann, dass jedes wohlformulierte mathematische Problem lösbar ist. Es mussten noch einige Jahre vergehen, bis Gödel (1906-1978) mit seinen *Unvollständigkeitssätze*n 1931 einen Strich durch diese Rechnung machte und auch 1938 zeigte, dass sich aus der ZFC-Mengenlehre die Kontinuumshypothese nicht widerlegen lässt. Erst 1963 zeigte Cohen (1934-2007), dass sie so auch nicht bewiesen werden, also diese Frage tatsächlich nicht entschieden werden kann [5].

Hilbert vertrat den sogenannten *Formalismus*, für den mathematische Objekte lediglich Zeichen auf dem Papier sind und mit denen nach Regeln der Logik auf der Basis einer Axiomatik geschlossen werden kann. Es **gibt** dort aktual unendliche Mengen und Grenzwerte sind statische gegebene Objekte. Eine der Forderung war, die innere Widerspruchsfreiheit der Axiomensysteme zu beweisen, was sich nach Gödels Arbeiten als nicht durchführbar erwies. Hierdurch erlitt der Formalismus eine schwere Niederlage. Andererseits kann man sagen, dass heute fast alle Mathematiker formalistische Axiomatiker sind.
Die *formalistischen* Positionen Hilberts waren nicht ungeteilt. Es entwickelte sich in den 1920er Jahren der bis in das Persönliche gehende *Grundlagenstreit* in der Mathematik, der bis 1930 andauerte. Der bekannteste Opponent war Luitzen Egbertus Jan **Brouwer** (1881-1966), der die *intuitionistische* Position vertrat. Nach Brouwer ist die Mathematik identisch mit dem exakten Teil unseres Denkens. Hier werden nur Beweise akzeptiert, die konstruktiv durchführbar sind, und ohne den Satz vom ausgeschlossenen Dritten, also ohne *Widerspruchs-beweise* auskommen müssen. Als aktual unendliche Mengen, werden nur die akzeptiert, die algorithmisch konstruierbar sind. Reelle Zahlen wären demnach nur potenziell unendlich. Brouwer macht hier allerdings eine Ausnahme, weil er das Kontinuum zu einer *Urintuition* erklärte. Grenzwerte sind hier dynamische Objekte, die durch den Prozess des Näherns definiert sind [9], [10].
Es gibt somit in der Philosophie der Mathematik neben der Ablehnung aller Unendlichkeitsbegriffe (*Ultrafinitismus*), die ausschließliche Akzeptanz des potenziell Unendlichen (*Finitismus*), darüberhinausgehend die Akzeptanz des aktual Unendlichen nur für operativ abgeschlossene Mengen, wie die der natürlichen Zahlen (Konstruktivismus), sowie die Akzeptanz des aktual Unendlichen nur für das Kontinuum (Intuitionismus), während der *Platonismus* das aktual Unendliche durchgehend akzeptiert. Das berührt natürlich auch die Frage, ob Mathematik erfunden oder entdeckt wird.
Obwohl die jeweilige Begründung der Grundlagen der Mathematik und insbesondere der Analysis der jeweiligen Gruppen von den jeweiligen anderen bezweifelt werden; aus deren Sicht also auf dünnem Eis steht, so kümmert sich der Großteil der mathematischen Gemeinde wenig bis gar nicht darum. Trotzdem passiert immer wieder Erstaunliches, etwa mit der Einführung von *verdichteten Mengen* durch Peter **Scholze** (*1987) und Dustin **Clausen**, die ein neues Licht auf die reellen Zahlen und damit auf die Grundlage der Analysis werfen [11]. Ebenso gibt es Versuche in Bereichen der Mathematik auf reelle Zahlen ganz zu verzichten, wie es zum Beispiel Norman **Wildberger** in seiner *Rationalen Trigonometrie* versucht, die im Wesentlichen den reellen Winkel durch ein rationales Streckenverhältnis ausdrückt und so die gesamte Trigonometrie ohne reelle Sinus- und Kosinusfunktion reproduziert [12].

4. Die Physik und das Unendliche

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber bei dem Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.
(Albert Einstein)

Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, betonte bereits Galileo Galilei vor 401 Jahren [13]. Ob und warum das so ist, ist ein ganz anderes Problem, das wir hier nicht verfolgen wollen. Fest steht, dass wir Phänomene in der Natur mit mathematischen Methoden in Raum und Zeit erfolgreich beschreiben und deren Entwicklung vorhersagen können. Im Prinzip! Konkret kann das sehr schwierig werden. Das Hauptwerkzeug, um sich verändernde Prozesse zu beschreiben, ist die Methode der Differenzialgleichungen, die die Änderungen von beobachteten Größen in eine Beziehung bringen. Das sind mathematisch Ableitungen nach der Zeit oder dem Ort der betrachteten Größen, wie z.B. Lage, Kraft, Potenzial, Druck oder Temperatur zusammen mit Anfangs- oder Randbedingungen. In den Lösungen der Gleichungen treten oft mathematische Funktionen auf, die zu bestimmten Zeiten oder Orten singulär bzw. unendlich sind. Zum Beispiel ist die Anziehungskraft zwischen zwei Punktmassen umgekehrt proportional zum Quadrat deren Abstands, d.h. sie wird sehr klein, wenn sich die Massen weit entfernen, wird aber formal unendlich groß, wenn sie sich begegnen, also unendlich dicht beieinander sind. Physikerinnen und Physiker verstehen solche Singularitäten als Hinweis, dass die Beschreibung dort versagt. Wie wir sehen werden, ist die Frage, ob es in der Natur tatsächlich also *aktual* Unendlichkeiten gibt, umstritten und nicht geklärt. Roger **Penrose (*1931)** hat sogar für die Gravitation die Hypothese einer *kosmischen Zensur* eingeführt, die verhindern soll, dass eine solche Singularität beobachtet werden kann [14]. Wenn Differenzialgleichungen zusammen mit definierten Anfangsbedingungen das letzte Wort für die Beschreibung der Welt sind, ist diese demnach vollständig *determiniert* und die scheinbare Offenheit der Zukunft ist nur unserer Unkenntnis der genauen Anfangsbedingungen geschuldet.

Das Große

Ob das Universum unendlich ausgedehnt ist und ob es vielleicht schon ewig währt, war bis ins 19. Jhd. eine eher metaphysische oder philosophische Fragestellung, obwohl Heinrich Wilhelm **Olbers** (1758-1840) schon 1823 darauf hinwies, dass es in einem ewig existierenden, unendlich ausgedehnten Universum auch nachts taghell sein müsste, weil jede Sichtlinie irgendwann auf einen Stern stoßen müsste [15]. Die Lösung des Problems gelang aber eigentlich erst durch und nach Edwin **Hubble** (1889-1953), der 1926 nachwies, dass es außerhalb der Milchstraße viele weitere Galaxien gibt, deren Entfernung er bestimmen konnte [16], [17], [18]. Aus den bekannten Rotverschiebungen und den Entfernungen schloss der Jesuit Georges **Lemaître** (1894-1966), dass die meisten Galaxien sich umso schneller von uns fortbewegen, je weiter sie entfernt sind also das

Universum expandiert [19]. Daraus ergibt sich zum einen, dass es einen Anfang gegeben haben muss und zum anderen, dass die fliehenden Galaxien in sehr großer Entfernung scheinbar Lichtgeschwindigkeit erreichen und entferntere Objekte so aus unserem Blick hinter einem *Horizont* entschwinden. Lemaître wandte dazu die von Albert **Einstein** (1879-1955) 1915/16 entwickelte *Allgemeine Relativitätstheorie* [20] an.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gravitation zwischen Massen durch eine im Prinzip messbare Krümmung der Raumzeit erklärt. Angewendet auf ein homogen und isotrop gedachtes Universum ergeben sich drei Möglichkeiten für die globale Geometrie, die durch die globale Massenverteilung und die dadurch verursachte globale Krümmung bestimmt ist. Diese kann negativ, null oder positiv sein. Eine Schnittfläche durch den Raum wäre danach sattelförmig, flach-euklidisch oder sphärisch geschlossen. Die ersten beiden Fälle stünden für ein unendlich ausgedehntes Universum, die letzte für ein geschlossenes Universum mit einem endlichen Volumen. Die aktuellen Messdaten sprechen für ein flaches Universum, oder zumindest eines, deren Krümmung so gering ist, dass dies erst außerhalb des Horizonts eine Rolle spielt. Es spricht also einiges dafür, dass die Welt einen Anfang hatte und unendlich ausgedehnt ist.

Das Kleine

Wenn wir für das expandierende Universum die Zeit rückwärtslaufen lassen würden, müssten wir annehmen, dass die Massen früher sehr viel dichter beieinandergestanden haben. Das sehr frühe Universum war damit sehr heiß und sehr dicht, formal zum Zeitpunkt null *unendlich* heiß und dicht. Auch wenn theoretische Rechnungen bis zu Bruchteilen von Sekunden an den Anfang herangeführt werden können, so versagt doch hier die Theorie. Was hier fehlt ist eine konsistente Vereinigung der Theorien für das Große und das ganz Kleine. Neben der heute *Urknall* genannten Expansion des Universums aus zumindest einem sehr heißen und sehr dichten Anfangszustand gibt es eine zweite Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie, die final wieder zum Zusammenbruch der Theorie führt. Schon 1916 fand Karl **Schwarzschild** (1873-1916) eine Lösung der Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die das Gravitationsfeld einer Massenkugel beschreibt [21]. Ist die Dichte der Kugel groß genug, so wird in einem Schwarzschild-Radius genannten Abstand die Gravitation so stark, dass sich nicht einmal mehr Licht von der Kugel entfernen kann. Man erhält ein sogenanntes *Schwarzes Loch*. Es bildet sich wieder ein Horizont, in den man zwar hineinfallen, aber man nie wieder entweichen kann. Solche Dichten erschienen damals absurd und unphysikalisch, man würde sie z.B. erhalten, wenn man die gesamte Erde auf die Größe einer Murmel komprimieren könnte. Robert **Oppenheimer** (1904-1967) untersucht 1939 zusammen mit George Michael **Volkof** (1914-2000) eine sphärisch symmetrische Staubwolke, die unter ihrem eigenen Gewicht zusammenstürzt [22]. Er findet, dass die Wolke final zu einem Schwarzen Loch mit einer punktartigen Singularität unendlicher

Dichte und unendlicher Krümmung wird. Erst als Roger **Penrose** und Stephen Hawking (1942-2018) Ende der 1960er Jahre zeigen, dass dies auch unter Vernachlässigung der Symmetrieannahmen zwingend passiert, wurde die Möglichkeit der Existenz von Schwarzen Löchern ernst genommen [23]. Heute wissen wir, dass Schwarze Löcher der Endzustand schwerer Sterne sind, die ihren Energievorrat erschöpft haben und dass sich in den Zentren fast aller Galaxien Schwarze Löcher mit Massen von Millionen bis Milliarden Sonnen befinden. Wir können diese Objekte nur durch ihre Außenwirkungen nachweisen und vieles ist noch rätselhaft. Wie schon beim Urknall fehlt eine Theorie dieser hohen Dichten und Krümmungen, die die finale Singularität vielleicht vermeiden lassen.

Die Theorie für das Kleine ist die *Quantenmechanik*, zu der Einstein auch wesentliches beigetragen hat und die sich bis in die 1930er Jahre entwickelt hat und immer noch weiterentwickelt wird. Für unsere Belange ist die von Werner **Heisenberg** (1901-1976) um 1927 entdecke Unschärferelation [24] von Bedeutung. Sie besagt, dass quantenmechanisch komplementäre Größen wie Ort und Impuls nicht gleichzeitig scharf definierte Werte haben. Will man z.B. den Ort eines Teilchens beliebig genau bestimmen, so wird dessen Geschwindigkeit beliebig ungenau. Das gleiche gilt für das Energie-Zeit-Paar. D.h. für sehr kurze Zeiten ist die Energie eines Systems entsprechend unbestimmt, kann also fluktuieren. Das liefert eine plausible Erklärung für die sogenannten *Vakuumfluktuationen*, also der nachgewiesenen spontanen Erzeugung und Vernichtung von Teilchen im Vakuum, die aber eigentlich erst im Rahmen der *Quantenfeldtheorie* verstanden werden. Folgt man der Idee der Energie-Zeitunschärfe, so findet man bei sehr kleinen Längenskalen (10^{-35} m) für sehr kurze Zeiten (10^{-44} s) sehr starke Fluktuationen der Energie (19^{19} GeV) und damit nach Einstein der Massen in einem sehr kleinen Raumgebiet. Es entstehen ständig für sehr kurze Zeiten kleine Schwarze Löcher, die die Raumzeit verzerren und sofort wieder verschwinden. Das ist konsistent mit den Überlegungen Hawkings [25], der zeigte, dass Schwarze Löcher wieder verdampfen und das umso schneller, je kleiner sie sind. Im Kleinen wird die Raumzeit damit schaumartig und der Begriff des Kontinuums verliert seine Bedeutung. Damit erhält die reale Raumzeit eine dynamische, granulare Struktur und die Idee eines beliebig teilbaren Kontinuums wird hinfällig wie im Übrigen auch Zenons Pfeilparadoxon. Differenzialgleichungen für physikalische Größen können daher nur als idealisiere Beschreibungen gemittelter Größen oberhalb einer gewissen Skala verstanden werden.

Die auch mit Differenzialgleichungen formulierte Quantenmechanik beschreibt aber gar nicht mehr die physikalischen Größen selbst, sondern die Möglichkeiten ihrer Messwerte, die durch eine Messung realisiert werden. Die konkrete Messung liefert dann einen zufälligen Wert im Rahmen dieser Möglichkeiten. Einerseits ist nun die Entwicklung der Möglichkeiten *vollständig deterministisch,* andererseits soll das Ergebnis der Messung *echt zufällig* sein. Das ist verwirrend und liefert viel Spielraum für Interpretationen der Theorie. Sie ist aber sicher unvollständig, da sie mit der Allgemeinen Relativitätstheorie inkompatibel ist. Beim Beginn des Universums, bei Schwarzen Löchern und bei sehr kleinen Skalen der Raumzeit müssen aber zwingend beide Theorien angewendet werden, um ein vollständiges Bild zu erhalten. Diese *Quantengravitation* genannte vereinigte Theorie ist leider erst in Ansätzen vorhanden. Prominente Wissenschaftler wie Roger Penrose versprechen sich von dieser Theorie die Klärung dieser offenen Fragen und darüber hinaus der Frage des Messprozesses und sehr spekulativ bis hin zum Verständnis des Bewusstseins [26].

Und darüber hinaus

Die Suche nach der großen einheitlichen Theorie stagniert seit (sehr) vielen Jahren, obwohl einige Kandidaten zumindest zeitweise in die richtige Richtung zu weisen schienen. Beobachtbare Vorhersagen liefern sie aktuell nicht. Interessant ist ein neuer Ansatz von Nicolas **Gisin** (*1952) und Flavio **Del Santo**, die für die Formulierung physikalischer Gleichungen die Grundlagen der Analysis hinterfragen und die intuitionistischen Ideen Brouwers wiederbeleben [27], [28], [29]. In ihrer Sichtweise würde die *Existenz* beliebiger reeller Größen in einem endlichen Raumzeit-Intervall unendlich viel Information beinhalten, was nicht möglich ist, da dies auch unendlich viel Energie bzw. Masse bedeuten würde. Sie verwenden daher einen intuitionistischen Ansatz für reelle Zahlen, die sich erst in der Zeit entwickeln, was auch mit der Zeit selbst identifiziert werden kann. Zu jedem Zeitpunkt existiert daher nur eine endliche Approximation eines reellen Wertes. Ihnen gelang es mit diesem Ansatz immerhin die klassische Mechanik zu rekonstruieren, die damit ihre Determiniertheit verliert. Ob dies auch für die Quantenmechanik und Relativitätstheorie gelingt, bleibt abzuwarten. Interessant ist aber, dass hier die umstrittenen Grundlagen der Mathematik direkte Auswirkungen auf die physikalische Beschreibung der Natur haben.

5. Fazit

Wir haben versucht einiges über den Begriff der Unendlichkeit aus der Sicht der Philosophie, Mathematik und Physik zu beleuchten. Um auf die eingangs erwähnte „praktische Relevanz“ zurückzukommen, so muss man feststellen, dass dieses für das praktische Ingenieurwesen wohl vorerst nicht der Fall ist. Allerdings haben wir einige der großen Fragen der Menschheit berührt und gesehen, dass sie den Bereich der metaphysischen Spekulation verlassen und beantwortbar werden.

Literaturverzeichnis

1. Achilles und die Schildkröte
   https://de.wikipedia.org/wiki/Achilles_und_die_Schildkröte
2. Pfeil Paradoxon
   https://de.wikipedia.org/wiki/Pfeil-Paradoxon
3. Potenzielle und aktuale Unendlichkeit
   https://de.wikipedia.org/wiki/Potentielle_und_aktuale_Unendlichkeit
4. Julia Mann, Der Raum- und Zeitbegriff bei Kant
   https://www.grin.com/document/9780?lang=de
5. Moore, A.W. (2019). The Infinite, Routledge. 3. Edition
6. Joseph, George Gheverghese. (2010). The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics - Third Edition. Princeton University Press.
7. Rauthmann, John F. (2017). Persönlichkeitspsychologie: Paradigmen – Strömungen – Theorien, Springer
8. Hilbert, David. (1926). Über das Unendliche. Math. Ann. **95**, 161–190 (1926).
   https://doi.org/10.1007/BF01206605
   https://rdcu.be/dmqxh
9. Heyting, Arend. (1931). Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik. Erkenntnis, *2*, 106–115. http://www.jstor.org/stable/20011630
10. Heyting, Arend. (1934). Der Brouwersche Intuitionismus. In: Mathematische Grundlagenforschung Intuitionismus Beweistheorie. Springer, Berlin, Heidelberg.
    https://doi.org/10.1007/978-3-642-65617-0_6
11. Bischoff, Manon. (2024). Zwei junge Forscher stellen die Mathematik auf den Kopf. Spektrum – Die Woche, Nr. 6
    https://www.spektrum.de/news/verdichtete-mathematik-clausen-und-scholze-revolutionieren-das-fach/2205266
12. Wildberger, Norman. (2005). Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry. Wild Egg.
13. Galilei, Galileo. (1623). Il saggiatore. Italien: Appresso Giacomo Mascardi.
14. Penrose, Roger. (1969): Gravitational collapse: the role of general relativity. In: Rivista del Nuovo Cimento, Numero Special, 1, S. 252
15. Olbers, Wilhelm. (1826). Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums. In: Astronomisches Jahrbuch für 1826. S. 110–121. (Nachdruck in: Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke. Im Auftrage der Nachkommen herausgegeben von C. Schilling. Berlin 1894.)
16. Hubble, Edwin. (1926). A spiral nebula as a stellar system: Messier 33. Astrophys. J., 63:236-74; Contrib. Mt. Wilson Obs., 14:83-122.
17. Hubble, Edwin. (1926). Extra-galactic nebulae. Astrophys. J., 64:321-69; Contrib. Mt. Wilson Obs., 14:379-428.
18. Hubble, Edwin. (1926). Non-galactic nebulae. I. Classification and apparent dimensions; II. Absolute dimensions and distribution in space. Publ. Astron. Soc. Pacific, 38:258-60
19. Lemaître, George. (1931). Expansion of the universe, A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae. *In:* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Band 91, S. 483–490, bibcode:1931MNRAS..91..483L

20. Einstein, Albert. (1916). *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. In: *Annalen der Physik*. Band 354, Nr. 7, S. 769–822, doi:10.1002/andp.19163540702.
21. Schwarzschild, Karl. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. In: Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik. S. 189.
22. Oppenheimer, Julius Robert. , Volkoff, George Michael. (1929). *On Massive Neutron Cores*. In: *Physical Review*. Band 55, Nr. 4, S. 374–381, doi:10.1103/PhysRev.55.374
23. Hawking, Stephen, Penrose, Roger. (1970). The singularities of gravitational collapse and cosmology. In: Proceedings of the Royal Society. *A*. Bd. 314, ISSN 0962-8444, S. 529–548.
24. Heisenberg, Werner. (1927*).* Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *In:* Zeitschrift für Physik. Band 43, Nr. 3, S. 172–198, doi:10.1007/BF01397280
25. Hawking, Stephen. (1975). Particle creation by black holes. In: *Commun. Math. Phys.* 43, S. 199–220
26. Penrose, Roger. (1996). Shadows of the Mind. Oxford University Press.
27. Gisin, Nicolas (2020), Mathematical languages shape our understanding of time in physics. Nature Physics, 16. pp. 114-119
28. Flavio Del Santo and Nicolas Gisin. (2019). Physics without determinism: Alternative interpretations of classical physics, Phys. Rev. A 100, 062107
29. Wolchover, Nathalie. (2021). Unendlichkeiten Teil 3. Eine neue Mathematik der Zeit, Spektrum der Wissenschaften, 4.21. S. 62

Autor

Prof. Dr. rer. nat. Thomas Schramm

Geodäsie und Geoinformatik

Henning-Voscherau-Platz 1

D-20457 Hamburg

E-Mail: thomas.schramm@hcu-hamburg.de