

Dozentin : Fr . Prof. Dr. Gudrun Wolfschmidt  
Universität - Hamburg, Inst. IGN Seminar : SS 2004, Physik -u. Chemiegeschichte I V , 20. - Jh.  
Exkursion : nach Paris, vom 26. bis 30. Juni 2004

**Kurz- Referat : „ Lagrange - Punkte „ ( Librationspunkte L1 bis L5 )**

Berichter / Verfasser : Friedhelm Beichler, Dipl. Ing. ( Ma.-bau.)



**Biographie : Joseph Louis de Lagrange** , eigentlich genannt Giuseppe Ludovico Lagrangia , der „ italienisch – französische „ Mathematiker, Physiker u. Astronom , 25.1.1736 geb. in Turin ; gest.10.4.1813 in Paris. Nach dem Studium an der Universität von Turin wurde er 1755, mit 19\_Jahren, zum Professor an die Artillerieschule in Turin berufen. Im Jahre 1758 gründete er eine Gesellschaft, aus der sich später die „Turiner Akademie der Wissenschaften“ entwickelte. 1766 wurde J. L. Lagrange Nachfolger Leonard Euler als Direktor der „Preußischen Akademie“ der Wissenschaften. 20 Jahre später ging er auf Einladung König Ludwigs XVI von Frankreich nach Paris. Von 1787- 1790 mit einer Lehrtätigkeit an der Parise Akademie. Zur Zeit der „ Französische Revolution “ war er für die Kommission zur Aufstellung eines neuen Systems für Maße und Gewichte ( metrisches System ) verantwortlich und gehörte dem Komitee für Erfindungen an. Nach der Revolution ernannte man Lagrange 1795 zum Professor an der neu eingerichteten É`cole Normale, und ab 1797 an der E`col Polytechnique. Unter Napoleon wurde er Mitglied des Senats und erhielt den Titel eines Grafen. Lagrange, einer der größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts, begründete die Variationsrechnung, systematisierte das Gebiet der Differentialgleichungen und arbeitete u.a. an der Zahlentheorie . Im Bereich der Astronomie berechnete er die Libration des Mondes und die Planetenbewegungen. Sein bedeutendstes Werk, die Mécanique analytique ( Analytische Mechanik 1788 in 2 Bände ) ; nach ihm benannt unter anderem die Lagrange – Funktion I , Lagrange – Gleichungen usw. und behandelte **das Dreikörperproblem** , „ **entdeckte 1772 die 5 Librationspunkte** “ .

**Entdeckung** über das Dreikörperproblem (  $D^3$  ) die „ **Lagrange – Librationspunkte** „ Das (  $D^3$  ) stellt eines der Hauptprobleme der Himmelsmechanik dar. Die Bewegungen dreier Körper, die unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Massenanziehung stehen ( Punktmasse ), ist „ im allgemeinen nicht lösbar “. Zwischen den 3 Körpern herrschen Gravitationskräfte, unter deren Wirkung sie sich um den gemeinsamen Schwerpunkt auf gleicher Bahnebene bewegen .

Von **Lagrange** wurden 2 exakt lösbare Sonderfälle angegeben .

**zu 1** ) wenn 3 Massenpunkte die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks besetzen und sich mit gleicher Umlaufzeit bewegen, z.B. die Sonne mit Massenverhältnis zum Jupiter ( min.grösser 25 )

und ein 3. Körper im Gravitationsfeld, klein gegenüber den beiden Hauptmassen, um ihren gemeinsamen Schwerpunkt und Ebene rotieren .

**Zu 2** ) wenn 3 Massenpunkte ( Körper  $m_{1,2}$ , u.3) **auf derselben Verbindungsgeraden** rotieren; die drei Punktabstände werden durch das Massenverhältnis der beiden Hauptkörper bestimmt .

Der fr. Mathematiker entdeckte 1772 somit , **5 Librationspunkte** , **Lagrange- Punkte L1/ L5** , wo die Gravitations - und Zentrifugalkräfte im Gleichgewicht sind ( *Libra* , in Waage ) .

Die Skizzen zeigen nur grundsätzlich die Lagen der **Librationspunkte L1 bis L5 - Punkte** .

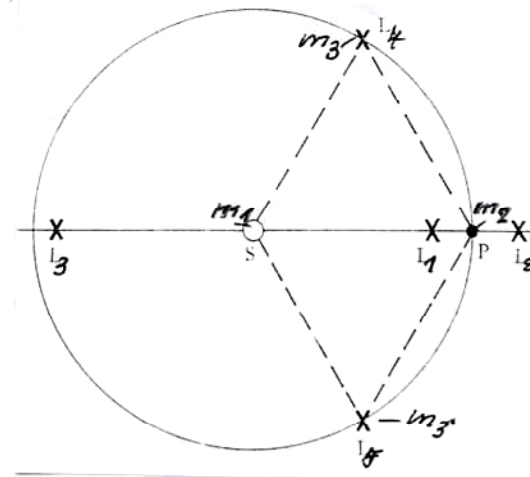
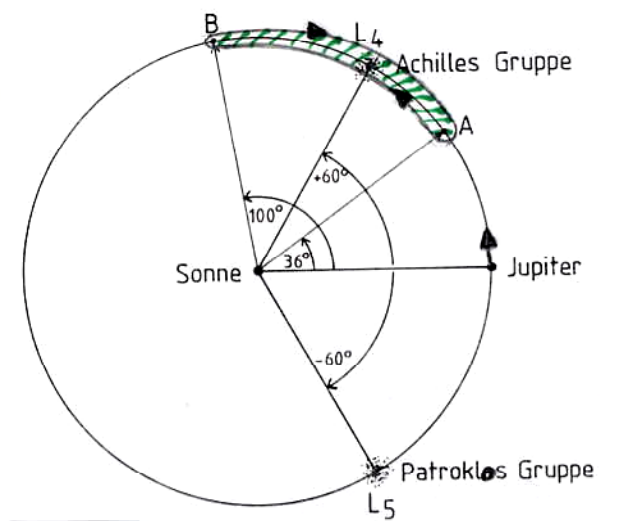
-- **L1, L2 und L3** als Beispiel, die Bahnbewegung der Erde (  $m_2$  ) um die Sonne (  $m_1$  ). Abstand von der Erde zum **L1-Punkt**, z. B. eine stationäre Raumsonde (  $m_3$  ) in rd. 1,5 Mill. km (  $1/100$  AE ) entfernt . Die **Librationsbahnen** um **L1 bis L3** sind bei kleinen Störungen jedoch instabil.

-- **L4 und L5** bewegen sich auf **Librationsbahnen** zwischen den Hauptmassen ( z.B. Sonne  $m_1$  und Jupiter  $m_2$  ), um die Dreieckspunkte **L4, L5** . Bei konstanten Entfernungsverhältnissen der Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt die Sonne ( auf ähnlichen Kegelschnitten ). Befindet sich die Masse (  $m_3$  ) nicht genau im **L4 bzw. L5 - Punkt**, **verlaufen diese Bahnbewegungen nierenförmig um L4, L5** in relativ stabilen Lagen .

Die wichtigsten Vertreter sind:

Achilles Gruppe: Achilles, Hektor, Nestor, Agamemnon, Odysseus, Ajax, Menelaus und Diomedes

Patroklos-Gruppe: Patroklos, Priamus, Äneas, Anchises, Treibes und Antilochus



1906 entdeckte der Astronom Max Wolf, von der Sternwarte Heidelberg, in der Umlaufbahn des Jupiters, im **L4**, einen ca. 70 km grossen Asteroiden, den er nach einem **griechischen Helden Achilles**, aus der „**Homers Ilias** „ (Trojanischer Krieg) den Namen gab. Im gleichem Jahr wurde im **L5** der 147 km grosse Asteroid entdeckt, der den Namen des **Trojaners, Patroklos** bekam. Alle weiteren über 1500 entdeckten Planetoiden um **L4**, Jupiter vorlaufend, bzw. um **L5** nachlaufende Planetoiden, werden allgemein „ **die Trojaner** „ genannt.

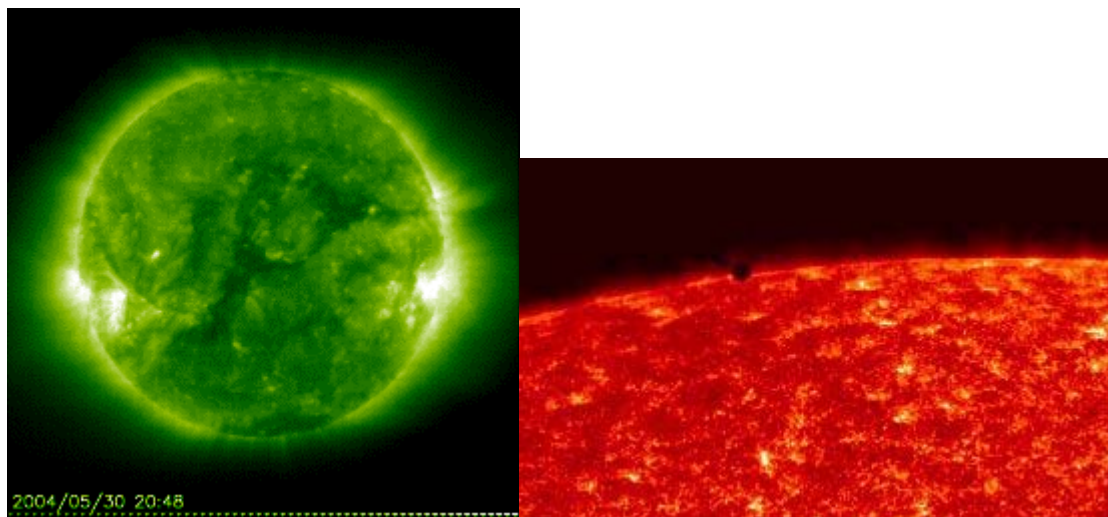
Nicht unerwähnt sollten die Beobachtungen bei Doppelstern - Systeme sein .Hiebei sind anfänglich die beiden sich um einen gemeinsamen Schwerpunkt umkreisenden Sterne völlig getrennt . Eine sogenannte „Roche – Fläche „ ( Aquipotentialfläche ) wird wie eine Sanduhrform dargestellt .Der Berührungspunkt, krit. Roche- Fläche, der 2 Sterne wird **innerer Lagrange-Punkt L1** genannt.

Ein stark vereinfacht beschriebenes Beispiel: nach Ende des H – Brennens eines Sterns dehnt er sich zum roten Riesen aus, Materie strömt über diesen **Punkt L1**, Entartung des Sterns führt nach weiterer Entwicklung zum weissen Zwerg.

### Welche praktische Bedeutung haben die Lagrange – Punkte ?

Spätestens jetzt in der Raumfahrt / Weltraumforschung erlangen die einzigartigen Beobachtungsstandorte, besonders die **Lagrange – Punkte L1 und L2**, grosse Bedeutung . Im Librationspunkt **L1**, ca. 1,5 Millionen von der Erde entfernt, auf die Sonne ausgerichtet , befinden sich gegenwärtig , in **Halo - Umlaufbahnen** die Raumsonden GENESIS und SOHO.

-- **SOHO als Sonnenobservatorium**, zur Beobachtungen von Sonnenaktivitäten, Veränderungen der Sonnenoberfläche, Spektralanalysen, Messungen über die innere, äussere Strukturen in der Photosphäre, Chromosphäre der Sonne usw. . Die Bilder von SOHO zeigen aktuelle Aufnahmen vom 30. Mai d. J. , über die Sonnenaktivitäten .



-- **GENESIS gewissermassen als Sonnenstaubsauger**, der ständig während seines gesamten Aufenthaltes Sonnenstaubpartikel im Sonnenwind auffängt . Die Raumsonde soll im September 2004 mit der Rückkehrkapsel zur Erde gebracht werden. Analysen von Wasserstoff und Heliumatome, eventuell schwerere Elemente können Aufschluss geben über die Sternentstehung und Entwicklung in der Sonnenatmosphäre .

Um den **L2 - Punkt**; auf der sonnenabgewandten Seite , ausserhalb des irdischen Magnetfeldes, unbeeinflusst vom Strahlungsgürtel befindet sich zur Zeit eine weitere Raumsonde .

-- **WMAP ( Wilkinson Microwave Anisotropy Probe )** , zur ständigen Messung der kosmischen thermischen Hintergrundstrahlung , analyse des Restlichts, Temperaturschwankungen auf immer kleineren Skalenwerten, die zu besseren Ergebnissen der **kosmologischen Parameter** führen . Verbesserte Informationen über die Temperaturveränderungen spiegeln direkt die Dichteschwankungen wieder, die im frühen Universum existierten . Über die gegenwärtige Expansionsgeschwindigkeit des Raumes, sowie der Entfernungsbestimmungen ( Rotverschiebung ) bzw. über den Reziprokwert des Hubble Parameter (  $H_0 \text{ rd. } 71 \text{ km/s } 1/\text{Mpc}$  ) wird das Alter unseres Universums auf  $13,7 \pm 0,2$  Milliarden Jahre errechnet . Weitere Raumsonden sind 2008 geplant, das Teleskop EDDINGTON soll die zeitlichen Variationen der Helligkeiten von ca. 500 000 Tausend Sternen messen und für 2010 das

Weltraumteleskop HUBBLE, Nachfolger JWST und weitere Projekte wie DARWIN, eine Mission auf der Suche nach erdähnlichen Planeten .

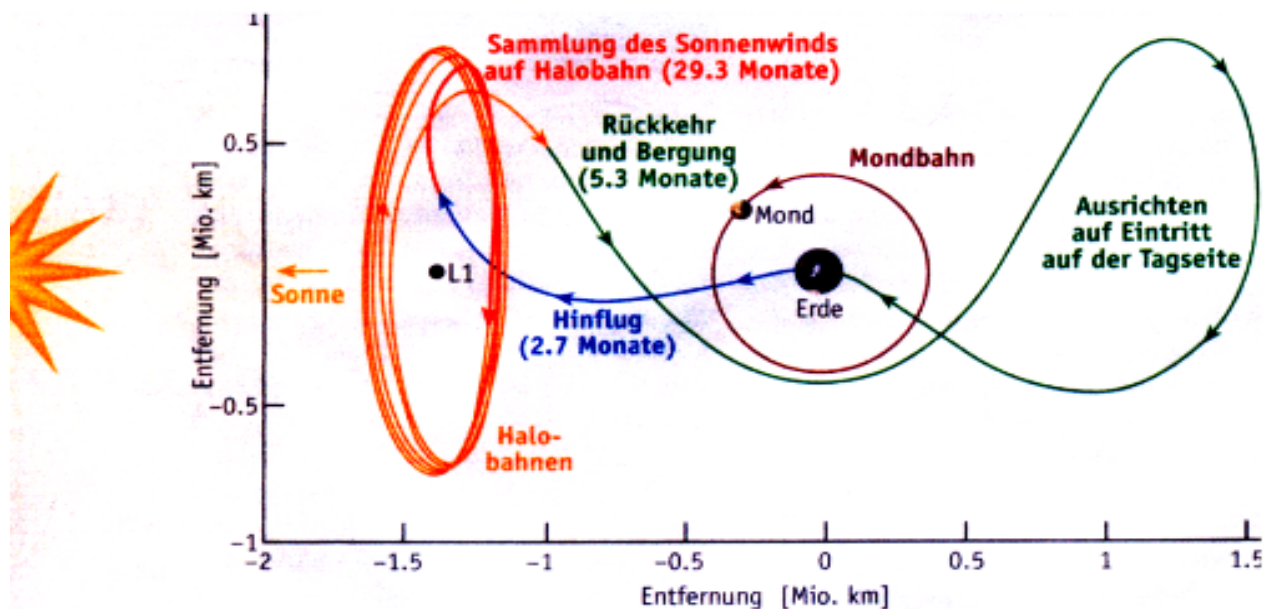
4

## Praktische Anwendung in Halo - Umlaufbahnen

Raumsonden direkt an statisch und dynamisch rel. labilen Beobachtungsorten L1, L2 zu stationieren, ist unpraktisch . Schon kleine Bewegungsstörungen an diesen verhältnismässig geringen Körpermassen (  $m_3$  ) erfordern ständige Schubkorrekturen, um die Raumsonde an den Lagrange – Punkt stationär zu halten .

Wenn jedoch die Sonde Schwingungsbewegungen um diesen Beobachtungsort ausführt, wird die dynamisch stabilisierende Wirkung der Corioliskraft ausgenutzt . Auf diese Weise ist ein zeitlich stabiler Aufenthalt in der Umgebung der Lagrange Punkte möglich. Es handelt sich um gekoppelte Schwingungen um den Gleichgewichtspunkt, mit wechselnden Schwingungsparametern in verschiedenen Raumrichtungen . Es ergeben sich daraus so genannte **Lissajou-Figuren** , ( n.d. franz. Mathematiker, Jules Antoine Lissajou 1822 / 1880 ) . Sie ähneln einer Achterbahn, ringförmig, geschlossene sich nicht überschneidende Umlaufbahnen. In diesen Halo – Umlaufbahnen , sind nur noch kleine treibstoffsparende Kurskorrekturen erforderlich, die ein langsames Abdriften der Sonde verhindern .

Die Mission der Raumsonde GENESIS ist ein exemplarisches Beispiel, einer derartigen Flugbahn, Halo – Umlaufbahnen um L1. Mit einer gleichzeitigen Anwendung des Bumerang – Effekts . Dieser beinhaltet gratis, ohne zusätzlichen Energieaufwand, auch die Transferbahnen des Hin - und Rückfluges um L2, auf dem **Super Highway**. Voraussetzung ist eine genaue Einhaltung der errechneten Flugbahn von der Anfangsstartphase an . Diese Halo - Flugbahnen, sind nur mittels komplexen Computersimulation durch numerische Lösung der Bewegungsdifferentialgleichungen der Raumsonde zu errechnen . So eine Flugbahn, vom Start bis zur Landung auf der Erde, zeigt schematisch die folgende Abbildung der Nasa .



## Quellenangaben :

DONALD WISS u. TILMANN ALTHAUS, Sterne und Weltraum 2003 ;  
WOLFGANG BLUM , bild der wissenschaft 2004 ; GÜNTHER WUCHTERL Sterne und Weltraum 2002  
Lexikon der Physik , Spektrum Akad. Verlag Heidelberg, Berlin 1999 ;  
Enzyklopädie Naturwissenschaft + Technik, Verl. moderne industrie 1997  
Fachlexikon ABC Physik ,Verl. Harri Deutsch Thun, Ffm 1982  
Redshft 4, NAVIGO USM.DE , Virtuelle Planetarium,United Soft Media , 2002

Lexikon der Astronomie , Verlag Spektrum Akademischer Heidelberg, Berlin 1999 und Herder Freiburg 1990  
Lexikon Technik u. Naturwissenschaften Fischer Handbücher, Georg Siemens Verl. Berlin 1972  
HANS HEINRICH VOIGT; Abriss der Astronomie 1. Bd. , Bibliographisches Institut , Mannheim 1969